Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$..

Pivotposition: Ist eine Position (i, j) in A, die zu einer führenden "1" in der reduzierten Zeilenstufenform (ZSF) von A gehört.

Pivotspalte: Ist eine Spalte von A, die eine Pivotposition enthält.

Theorem 3: **Existenz einer Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$:**

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn die ZSF der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ keine Zeile der Form $[0 \dots 0 \; c]$ mit $c \neq 0$ enthält. D.h. wenn die letzte Spalte von $[A|\vec{b}]$ keine Pivotspalte ist.

Eindeutigkeit der Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$:

Ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so besteht die Lösungsmenge aus

- einer eindeutigen Lösung $\Leftrightarrow$ Jede Spalte von A ist Pivotspalte.
- unendlich vielen Lösungen $\Leftrightarrow$ Mindestens eine Spalte von A ist keine Pivotspalte.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$.

Für das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ sind

- **Basisvariablen** diejenigen Variablen des Gleichungssystems, die Pivotspalten der Koeffizientenmatrix A zugeordnet sind,
- **freie Variablen** diejenigen Variablen des Gleichungssystems, die keine Basisvariablen sind.

Ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so besteht die Lösungsmenge aus

- einer eindeutigen Lösung $\Leftrightarrow$ alle Variablen sind Basisvariablen,
- unendlich vielen Lösungen $\Leftrightarrow$ es existiert mindestens eine freie Variable.

Theorem 4:

Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $(m \times n)$-Matrix A ist für **jeden** Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ lösbar $\Leftrightarrow$ A besitzt **in jeder Zeile** eine Pivotposition.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & - & 2x_5 = & -4 \\ -2x_1 & - & 12x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 = & 11 \\ 3x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & - & 4x_5 = & -8 \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ -2 & -12 & -2 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 18 & 4 & -7 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

Mit Gauss-Algorithmus in ZSF (Vorwärtsphase):

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \end{array}\right)$$

Ablesen:

- Basisvariable: x_1, x_3 und x_5,
- freie Variable: x_2 und x_4.
- Letzte Spalte ist nicht Pivotspalte $\Rightarrow$ Lösungen existieren.
- Es existieren freie Variable $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel: Weiter mit Gauss-Algorithmus in reduzierte ZSF (Rückwärtsphase):

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} x_1 &= -6x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= 5 + 4x_4 \qquad\qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Mit Parameter $x_2 =: t, \quad x_4 =: s$ geschrieben:

$$\begin{aligned} x_1 &= -6t - 3s \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 5 + 4s \\ x_4 &= s \\ x_5 &= 7 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= 0 - 6 \cdot t - 3 \cdot s \\ x_2 &= 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot s \\ x_3 &= 5 + 0 \cdot t + 4 \cdot s \\ x_4 &= 0 + 0 \cdot t + 1 \cdot s \\ x_5 &= 7 + 0 \cdot t + 0 \cdot s \end{aligned}$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel: Lösungsmenge in parametrischer Vektorform:

Bezeichnung der Parameter: $x_2 =: t, \quad x_4 =: s$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -6t-3s \\ x_2 & = & t \\ x_3 & = & 5+4s \\ x_4 & = & s \\ x_5 & = & 7 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{v}_2} \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Kurz: $\boxed{\vec{x} = \vec{v}_0 + t\,\vec{v}_1 + s\,\vec{v}_2, \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}}\,.$

Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge ist eine Ebene in $\mathbb{R}^5$, die an den Vektor $\vec{v}_0$ "angeheftet" ist.

Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein **homogenes lineares Gleichungssystem** ist von der Form

$$A\vec{x} = \vec{0} \,.$$

Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist stets lösbar, denn es besitzt die **triviale** Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

Interessant ist, ob auch **nichttriviale** Lösungen existieren, d.h. Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Existenz nichttrivialer Lösungen:

Theorem 5: Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn es mindestens eine freie Variable besitzt.