

Ergänzung zur Lösung von Aufgabe Ü3: Dichtetransformation

Gegeben ist der stetige Zufallsvektor (X, Z) mit Dichtefunktion $f_{(X,Z)}$ und Randdichten f_X bzw. f_Z . Weiterhin sei die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, z) \mapsto T(x, z) = (x, x + z)$$

gegeben. Wir bezeichnen die Komponenten der Abbildung mit T_x und T_z und die Funktionswerte der Komponentenabbildungen mit $\tilde{x} = T_x(x, z)$ und $\tilde{z} = T_z(x, z)$. Wenden wir die Abbildung T auf (X, Z) an, erhalten wir einen neuen Zufallsvektor $(\tilde{X}, \tilde{Z}) = T(X, Z)$. Wir wollen $f_{(\tilde{X}, \tilde{Z})}$, d.h. die Dichte von $(\tilde{X}, \tilde{Z})$, mittels Dichtetransformationssatz¹ berechnen.

Zunächst bestimmen wir die Umkehrabbildung von T und nennen sie T^{-1} .

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{x}, \tilde{z}) \mapsto T^{-1}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x})$$

Wir nennen die Komponentenabbildungen T_x^{-1} und T_z^{-1} . Die Jacobimatrix J von T^{-1} ist definiert durch

$$J(\tilde{x}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_x^{-1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) & \frac{\partial T_x^{-1}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) \\ \frac{\partial T_z^{-1}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) & \frac{\partial T_z^{-1}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}, \tilde{z} \in \mathbb{R}.$$

Die Determinante von J ist

$$\det(J(\tilde{x}, \tilde{z})) = 1, \quad \tilde{x}, \tilde{z} \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Dichtetransformationssatz gilt nun für alle $\tilde{x}, \tilde{z} \in \mathbb{R}$

$$f_{(\tilde{X}, \tilde{Z})}(\tilde{x}, \tilde{z}) = f_{(X,Z)}(T_x^{-1}(\tilde{x}, \tilde{z}), T_z^{-1}(\tilde{x}, \tilde{z})) |\det(J(\tilde{x}, \tilde{z}))| \\ = f_{(X,Z)}(\tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x}).$$

Wegen $\tilde{X} = X$ gilt also auch für alle $x, \tilde{z} \in \mathbb{R}$

$$f_{(X, \tilde{Z})}(x, \tilde{z}) = f_{(X,Z)}(x, \tilde{z} - x).$$

Nimmt man die Unabhängigkeit von X und Z an, so folgt

$$f_{(X, \tilde{Z})}(x, \tilde{z}) = f_X(x) f_Z(\tilde{z} - x).$$

Bemerkung: Um im obigen Beispiel die Dichte des transformierten Zufallsvektors auszurechnen, ist es nicht unbedingt notwendig, den Dichtetransformationssatz zu verwenden. Eine einfache Variablensubstitution würde genügen. Der Grund dafür, dass wir den Satz trotzdem verwenden ist, dass wir seine Anwendung an diesem einfachen Fall gut nachvollziehen können.

¹Die Transformation einer Wahrscheinlichkeitsdichte wird u.a. in Systemtheorie III behandelt. Details zur Dichtetransformation lassen sich z.B. in *Wunsch, Schreiber: Stochastische Systeme, Springer 2005*, in Kapitel 2.1.1.2 nachlesen.