Lösung 1.1

Gegeben: $a\, t'' + b = 0, \qquad t(0) = t_1, \qquad t(L) = t_2, \qquad t_1 > t_2$

Gesucht: $t(x)$, Diskussion der Fälle $b < 0$, $b = 0$ und $b > 0$
Skizze des qualitativen Verlaufs von t(x).

Die angegebene Dgl. entspricht der Dgl. des stationären Temperaturfeldes in einer ebenen Platte mit innerer Wärmequelle ($b > 0$) bzw. mit einer Wärmesenke ($b < 0$). Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Dgl. 2. Ordnung mit kontanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösung ergibt sich als Summe der Lösung der homogenen Dgl. ($b = 0$) und der partikulären Lösung der inhomogenen Dgl.
Umformung und zweimalige Integration liefert

$$t'' = -\frac{b}{a} \qquad\qquad t' = -\frac{b}{a}\, x + C_1$$

$$t = -\,\frac{b}{2\,a}\, x^2 + C_1\, x + C_2 \qquad\qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Die Integrationskonstanten werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt:

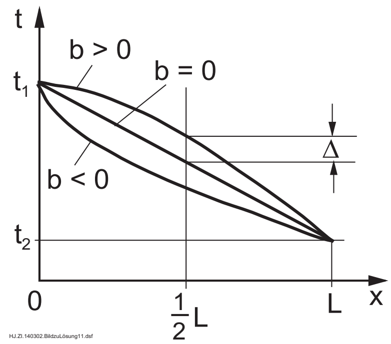
$$t(x=0) = t_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = t_1$$

$$t(x=L) = t_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{t_2 - t_1}{L} + \frac{b}{2\,a}\, L$$

Damit folgt für die spezielle Lösung nach Einsetzen und Umformen

$$t(x) = \frac{b}{2\,a}\, x\, (L - x) + x\, \frac{t_2 - t_1}{L} + t_1\ .$$

Die qualitative grafische Darstellung dieser Funktion zeigt nebenstehendes Bild. Bei $b = 0$ (keine Wärmequellen) liegt für die stationäre Temperaturverteilung in einer ebenen Wand eine lineare Funktion vor. Bei einer Wärmequelle ($b > 0$) ergibt sich ein nach oben gekrümmter Verlauf. Da die Wärmestromdichte auf der rechten Wandseite größer ist als auf der linken Seite, ist dort der Temperaturgradient größer.



Bei einer Wärmesenke ($b < 0$) ist der Verlauf nach unten gekrümmt und die größten Wärmestromdichten treten an der linken Wandseite auf. $\mid \Delta \mid$ liefert den Beitrag der partikulären Lösung. Das Betragsmaximum ergibt sich bei $x = 0{,}5\ L$ zu
$\mid \Delta_{max} \mid = \dfrac{b\ L^2}{8\ a}$.

Lösung 1.2

Gegeben: $\dfrac{d^2\,t}{dr^2} + \dfrac{n}{r}\,\dfrac{dt}{dr} = 0; \qquad n = 0, 1, 2$

Gesucht: allgemeine Lösung

Mit n = 0,1,2 beschreibt obige Dgl. das stationäre, eindimensionale Temperaturfeld in einer ebenen Platte, einer Zylinderwand bzw. einer Kugelwand.
Mit der Substitution $dt/dr = v$ folgt

$$\frac{dv}{dr} + \frac{n}{r}\,v = 0; \qquad \frac{dv}{v} = -\,n\,\frac{dr}{r}$$

n **= 0:**

$$dv = 0; \qquad v = C_1; \qquad t = C_1\,r + C_2$$

n **= 1:**

$$\frac{dv}{v} = -\,\frac{dr}{r}; \qquad \ln v = -\,\ln r + \ln C_1$$

$$v = C_1\,\frac{1}{r} = \frac{dt}{dr} \qquad t = C_1\,\ln r + C_2$$

n **= 2:**

$$\frac{dv}{v} = -\,2\,\frac{dr}{r}; \qquad \ln v = -\,2\,\ln r + \ln C_1$$

$$v = C_1\,\frac{1}{r^2} = \frac{dt}{dr} \qquad t = -\,C_1\,\frac{1}{r} + C_2$$

Zur Bestimmung der noch unbekannten Koeffizienten C_1 und C_2 müssen die Randbedingungen vorgegeben werden. Das ist jedoch nicht Ziel dieser Aufgabe.

Lösung 1.3

Gegeben: Ein Schmiedestück (m, c_p, t_0 bei τ_0), dem die Wirbelstromleistung P verlustlos zugeführt wird

Gesucht: Die Temperaturfunktion $t = t(\tau)$

Die Wirbelstromleistung P ist identisch mit dem zugeführten Wärmestrom $\dot{Q}$.

$$P = \dot{Q}$$

Dieser zugeführte Wärmestrom bewirkt eine Erhöhung der inneren Energie bzw. der Enthalpie des Schmiedestückes ($c_p \approx c_v$; fester Körper mit $\varrho = \text{const.}$)

$$\dot{Q} = \frac{dH}{d\tau} = \frac{m\ c_p\ dt}{d\tau} \quad \text{mit} \quad dH = m\ c_p\ dt$$

$$\dot{Q}\ d\tau = m\ c_p\ dt$$

Integration

$$\dot{Q} \int_{\tau_o}^{\tau} d\tau = m\ c_p \int_{t_o}^{t} dt$$

$$\dot{Q}\ (\tau - \tau_o) = m\ c_p\ (t - t_o)$$

Mit $\dot{Q} = P$ folgt

$$t = t_o + \frac{P\ (\tau - \tau_o)}{m\ c_p}$$

d. h. linearer Temperaturanstieg mit der Zeit.

Lösung 1.4

Gegeben: Rohrströmung mit Geschwindigkeitsprofil
$w(r) = w_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$
Temperaturprofil $\vartheta(r) = \frac{t(r) - t_K}{t_W - t_K} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$

Gesucht: mittlere Geschwindigkeit w_m
Mischungstemperatur ϑ_m

Das angegebene Geschwindigkeitsprofil gilt für eine laminare Rohrströmung. Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr ergibt sich aus der Integration des Geschwindigkeitsprofils über dem Rohrquerschnitt bezogen auf den Rohrquerschnitt. Für die Integration wird von schmalen Kreisringen mit der Breite dr und der Fläche $2\ \pi\ r\ dr$ ausgegangen. Für ein Rohr mit dem Radius R und dem variablen Radius r gilt

$$w_m = \frac{1}{\pi\ R^2} \int_0^R w(r)\ 2\ \pi\ r\ dr = \frac{2\ \pi\ w_{max}}{\pi\ R^2} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\ r\ dr$$
$$= \frac{2\ w_{max}}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4\ R^2}\right]_0^R = \frac{w_{max}}{2}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit entspricht der halben maximalen Geschwindigkeit, die in der Rohrmitte vorliegt.

Das angegebene Temperaturprofil stellt eine einfache Näherung dar, an der die Bildung der Mischungstemperatur gezeigt werden soll. Bei der Ermittlung der Mischungstemperatur ist zu beachten, daß sich sowohl die Geschwindigkeit als auch die Temperatur über dem Rohrradius ändern. Es muß deshalb bei der Integration von dem Enthalpiestrom als Funktion des Rohrradius ausgegangen werden. Es gilt für die mittlere Temperatur bzw. Mischungstemperatur

$$t_m = \frac{\int_0^R w(r)\ \varrho\ c_p\ t(r)\ 2\ \pi\ r\ dr}{\int_0^R w(r)\ \varrho\ c_p\ 2\ \pi\ r\ dr}.$$

Für konstante Stoffwerte ϱ und c_p und geschrieben mit der dimensionslosen Temperatur gilt analog

$$\vartheta_m = \frac{t_m - t_K}{t_W - t_K} = \frac{\int\limits_0^R w(r)\ \vartheta(r)\ \ 2\ \pi\ r\ dr}{\int\limits_0^R w(r)\ 2\ \pi\ r\ dr} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^R w_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\left(\frac{r}{R}\right)^2\ 2\ \pi\ r\ dr}{\int\limits_0^R w_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) 2\ \pi\ r\ dr} = \frac{\int\limits_0^R \left(\frac{r^3}{R^2} - \frac{r^5}{R^4}\right) dr}{\int\limits_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr} = \frac{\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{6}}{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{1}{3}.$$

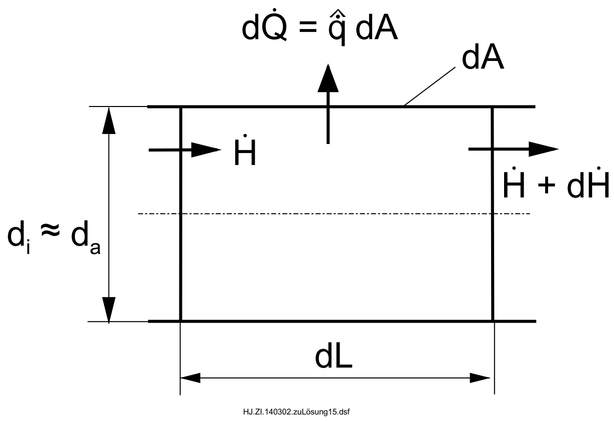
Für die vorgegebenen Profile für Geschwindigkeit und Temperatur ist die mittlere dimensionslose Temperatur 1/3. D. h., das Verhältnis der Differenz Mischungstemperatur minus Kerntemperatur zur Differenz Wandtemperatur minus Kerntemperatur ist 1/3.

Lösung 1.5

Gegeben: Flüssigkeitsdurchströmte Rohrleitung ($d_i \approx d_a,\ L,\ t_E,\ \varrho,\ w,\ c_p$)

Gesucht: Austrittstemperatur t_A für die Fälle

a) $\hat{\dot{q}} = \text{const.}$
b) $\hat{\dot{q}} \sim t - t_U$ (t_U = konstante Umgebungstemperatur)



Die Energiestrombilanz für ein kleines Stück der Leitung dL ergibt (siehe Bild)

$$\dot{H} - d\dot{Q} - (\dot{H} + d\dot{H}) = 0$$

$$d\dot{Q} = -\, d\dot{H}$$

Wärmestrom über Rohrwand

$$d\dot{Q} = \hat{\dot{q}}\ dA = \hat{\dot{q}}\ d\ \pi\ dL \quad \text{mit} \quad d_i = d_a = d$$

Änderung des Enthalpiestromes

$$d\dot{H} = \dot{m}\ c_p\ dt$$

Massestrom, berechnet aus Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \varrho\ w\ A = \varrho\ w\ \frac{\pi}{4}\ d_i^2\ .$$

Damit folgt nach Einsetzen und Umformen

$$4\ \hat{\dot{q}}\ dL = -\ \varrho\ w\ d\ c_p\ dt. \tag{1}$$

a) $\hat{\dot{q}} = \text{const.}$

$$4\ \hat{\dot{q}} \int\limits_{o}^{L} dL = -\ \varrho\ w\ d\ c_p \int\limits_{t_E}^{t_A} dt$$

$$t_A = t_E - \frac{4\ \hat{\dot{q}}\ L}{\varrho\ w\ c_p\ d}$$

b) Laut Aufgabe ist der flächenspezifische Verlustwärmestrom $\hat{\dot{q}} = k\ (t - t_U)$ mit dem Proportionalitätsfaktor k (Wärmedurchgangskoeffizient).

Einsetzen in Gl.(1) ergibt

$$4\ k\ (t - t_U)\ dL = -\ \varrho\ w\ d\ c_p\ dt.$$

Nach Trennung der Variablen folgt

$$4\ k\ dL = -\ \varrho\ w\ d\ c_p\ \frac{dt}{t - t_U}$$

Integration

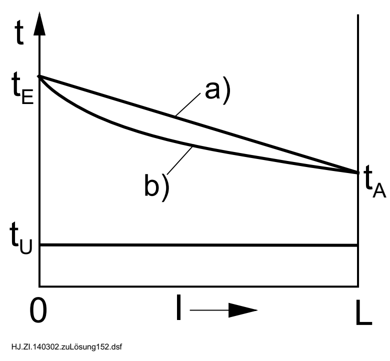
$$4\ k \int\limits_{o}^{L} dL = -\ \varrho\ w\ d\ c_p \int\limits_{t_E}^{t_A} \frac{dt}{t - t_U}$$

$$4\ k\ L = -\varrho\ w\ d\ c_p\ \ln \frac{t_A - t_U}{t_E - t_U}$$

$$t_A = t_U + (t_E - t_U)\ \exp\left[-\ \frac{4\ k\ L}{\varrho\ w\ c_p\ d} \right]\ .$$

Da die abgegebene Wärmestromdichte proportional der Differenz zwischen Flüssigkeits- und Umgebungstemperatur ist, ergibt sich ein exponentieller Verlauf der Flüssigkeitstemperatur längs der Rohrleitung und ebenso für die Austrittstemperatur in Abhängigkeit von der Rohrlänge.

Temperaturverlauf
längs der Rohrleitung



Gegeben: Stationäre Wärmeleitung in einer ebenen Wand mit
1. $\lambda = \lambda_0$, 2. $\lambda = \lambda_0(1 + a_1\ t)$, 3. $\lambda = \lambda_0(1 - a_1 t)$

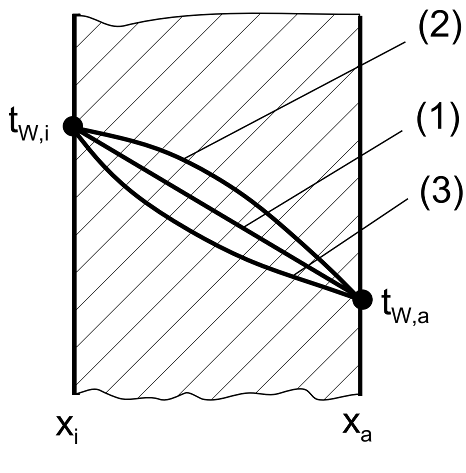
$\delta = 0,3$ m, $t_{W,i} = 20\ ^o$C, $t_{W,a} = -\ 10\ ^o$C, $\lambda = 1$ W/(m K) oder $\lambda = 1\ \dfrac{\text{W}}{\text{m K}}\left(1 + 0,02\ \dfrac{t}{^o\text{C}}\right)$

Gesucht: Temperaturverlauf $t(x)$ in der Wand
Wärmestromdichte $\hat{\dot{q}}$ durch Wand

Das Fouriersche Erfahrungsgesetz für eine ebene Wand lautet

$$\hat{\dot{q}} = -\ \lambda\ \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\hat{\dot{q}}}{\lambda}$$



Damit liefern die drei Fälle:

1. $$\frac{dt}{dx} = -\ \frac{\hat{\dot{q}}}{\lambda_0} = \text{const.}$$

(lineare Temperaturabnahme)

2. $$\frac{dt}{dx} = -\ \frac{\hat{\dot{q}}}{\lambda_0\ (1 + a_1\ t)} \neq \text{const.}$$

3. $$\frac{dt}{dx} = -\ \frac{\hat{\dot{q}}}{\lambda_0\ (1 - a_1\ t)} \neq \text{const.}$$

Die Wärmestromdichte durch die Wand berechnet sich aus der Integration des Fourierschen Erfahrungsgesetzes. Die Wärmestromdichte ist in der ebenen Wand und im stationären Fall konstant.

$$\hat{\dot{q}} \int\limits_{x_i}^{x_a} dx = -\int\limits_{t_{W,i}}^{t_{W,a}} \lambda\ dt$$

a) $\dot{\hat{q}} \int\limits_{x_i}^{x_a} dx = -\,\lambda \int\limits_{t_{W,i}}^{t_{W,a}} dt$

$$\dot{\hat{q}} = -\,\frac{\lambda\,(t_{W,a} - t_{W,i})}{x_a - x_i} = -\,\frac{1\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\,(-10\ ^\circ\mathrm{C} - 20\ ^\circ\mathrm{C})}{0,3\ m} = 100\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

b) $\dot{\hat{q}} \int\limits_{x_i}^{x_a} dx = -\int\limits_{t_{W,i}}^{t_{W,a}} \lambda_0\ (1 + at) dt$

$$\dot{\hat{q}}\ (x_a - x_i) = -\ \lambda_0 \left[t_{W,a} - t_{W,i} + \frac{a}{2}\left(t_{W,a}^2 - t_{W,i}^2\right)\right]$$

$$\dot{\hat{q}} = -\ \frac{\lambda_0 \left[t_{W,a} - t_{W,i} + \dfrac{a}{2}\ (t_{W,a}^2 - t_{W,i}^2)\right]}{x_a - x_i}$$

$$= -\ \frac{1\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} \left[-10\ ^\circ\mathrm{C} - 20\ ^\circ\mathrm{C} + \dfrac{0,02}{2\ ^\circ\mathrm{C}}\ ((-10)^2 - 20^2)\ ^\circ\mathrm{C}^2\right]}{0,3\ \mathrm{m}}$$

$$= 110\ \mathrm{W/m}^2.$$

Lösung 2.2

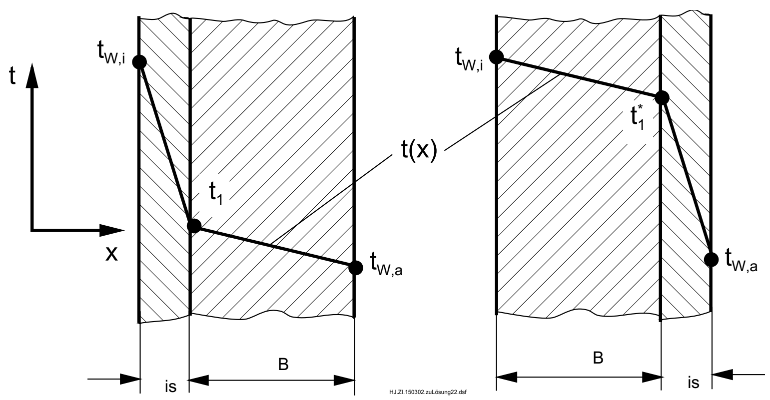
Gegeben: Betonwand mit Isolierschicht

$\delta_B = 0,16$ m $\qquad \delta_{\mathrm{Is}} = 0{,}03$ m

$\lambda_B = 0,80$ W/(mK) $\qquad \lambda_{\mathrm{Is}} = 0{,}06$ W/(m K)

$t_{W,i} = 12$ °C $\qquad t_{W,a} = -10$ °C

Gesucht: Temperatur an der Berührungsfläche, wenn die Isolierung innen bzw. außen angebracht ist.



Mit $\hat{\dot{q}} = \dfrac{\dot{Q}}{A}$, $\dot{Q} = \dfrac{\Delta t}{R_\lambda}$ und dem Wärmeleitwiderstand $R_\lambda = \dfrac{\delta}{\lambda\ A}$ gilt analog dem Ohmschen Gesetz für die gesamte Wand (Reihenschaltung) bzw. die linke Wandschicht

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{(R_{\lambda,B} + R_{\lambda,Is})\ A} = \frac{t_{W,i} - t_1}{R_{\lambda,Is}\ A} = \frac{t_{W,i} - t_1^*}{R_{\lambda,B}\ A}.$$

Damit folgt für die linke bzw. rechte Anordnung

$$t_1 = t_{W,i} - \hat{\dot{q}}\ R_{\lambda,Is}\ A; \qquad t_1^* = t_{W,i} - \hat{\dot{q}}\ R_{\lambda,B}\ A\ .$$

Die gegebenen Zahlenwerte liefern für $A = 1$ m^2

$$R_{\lambda,is} = \frac{\delta_{Is}}{\lambda_{Is}\ A} = 0,5\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}; \qquad \mathrm{R}_{\lambda,\mathrm{B}} = \frac{\delta_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}\ \mathrm{A}} = 0,2\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$\hat{\dot{q}} = \frac{12-(-10)}{0,5+0,2} \; \frac{\mathrm{K}}{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} \; \mathrm{m}^2} = 31,4 \; \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \; .$$

Die Wärmestromdichte durch die Wand ist unabhängig von der Reihenfolge der beiden Schichten.

Schließlich ergibt sich

$$t_1 = 12 \; {}^o\mathrm{C} \text{ - } 31{,}4 \; \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \; 0,5 \; \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} \; 1 \; \mathrm{m}^2 = -3,7 \; {}^\circ\mathrm{C}$$

$$t_1^* = 12 \; {}^o\mathrm{C} \text{ - } 31{,}4 \; \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \; 0,2 \; \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} \; 1 \; \mathrm{m}^2 = 5,7 \; {}^\circ\mathrm{C} \; .$$

Der Temperaturverlauf ist im Bild dargestellt. Da es sich um die Wärmeleitung durch eine ebene Wand für den stationären Fall bei konstantem Wärmeleitkoeffizienten handelt, treten lineare Temperaturverläufe auf. Je größer der Wärmeleitkoeffizient ist, desto kleiner ist der Temperaturgradient.

Gegeben: Stationäre Wärmeleitung durch ebene Wand
$\hat{\dot{q}} = 600$ W/m^2, $\delta = 0,2$ m, $t_{W,a} = 10$ ^{o}C,
$\lambda = \lambda_0\ (1 + a\ t) = 15\ (1 + 0,01\ t/^o\text{C})$ W/(m K)

Gesucht: Temperatur t_m in Wandmitte

Fouriersches Erfahrungsgesetz für ebene Wand

$$\hat{\dot{q}} = -\ \lambda\ \frac{dt}{dx}$$

Trennung der Variablen und Integration (zwischen $\delta/2$ und δ, da die Temperatur t_m an der Stelle $\delta/2$ gesucht ist und bei δ gegeben ist)

$$-\ \frac{\hat{\dot{q}}}{\lambda_0} \int\limits_{\delta/2}^{\delta} dx\ =\ \int\limits_{t_m}^{t_{W,a}} (1 + a\ t)\ dt \quad \text{mit} \quad a = 0,01/\ ^o\text{C und } \lambda_0 = 15 \text{ W/(m K)}$$

$$-\ \frac{\hat{\dot{q}}\ \delta}{2\ \lambda_0} = t_{W,a} - t_m + \frac{a}{2}\ \left(t_{W,a}^2 - t_m^2\right)$$

$$t_m^2 + \frac{2}{a}\ t_m - t_{W,a}^2 - \frac{2}{a}\ t_{W,a} - \frac{\hat{\dot{q}}\ \delta}{\lambda_0\ a} = 0$$

$$t_m = -\ \frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + t_{W,a}^2 + \frac{2}{a}\ t_{W,a} + \frac{\hat{\dot{q}}\ \delta}{\lambda_0\ a}}$$

$$t_m =\ -\ \frac{^o\text{C}}{0,01} + \sqrt{\frac{^o\text{C}^2}{0,01^2} + 10^2\ ^o\text{C}^2 + \frac{2\ ^o\text{C}}{0,01}\ 10\ ^o\text{C} + \frac{600\ \text{W/m}^2\ 0,2\ \text{m}\ ^o\text{C}}{15\ \text{W/(m K)}\ 0,01}}$$

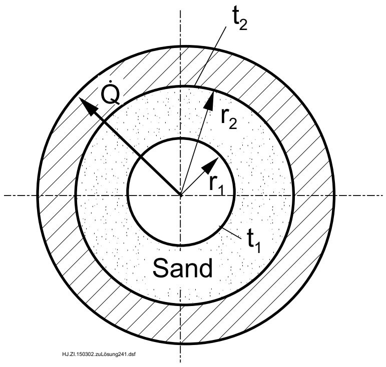
$$\underline{t_m = 13,58\ ^o\text{C}}$$

(Nur positive Wurzel liefert ein physikalisch sinnvolles Resultat.)
Aufgaben, bei denen nach einer örtlichen Temperatur gefragt ist, lassen sich auch ausgehend von der Fourierschen Differentialgleichung des Temperaturfeldes lösen. Die obige Lösung mit dem Fourierschen Erfahrungsgesetz als Ausgangsgleichung ist aber im vorliegenden Fall einfacher, da die Wärmestromdichte konstant und gegeben ist.

Lösung 2.4

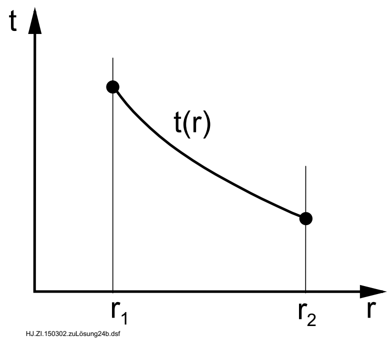
Gegeben: $d_1 = 150$ mm
$d_2 = 250$ mm
$t_1 = 25,9\ ^o$C
$t_2 = 20\ ^o$C
$\dot{Q} = 4{,}7$ W

Gesucht: a) $t = t(r)$
b) λ von Sand



a) Das Temperaturprofil in der durch den Sand gebildeten Kugelschale ist gemäß Umdruck S. 10

$$t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \ .$$



b) Für Wärmestrom und Wärmeleitwiderstand der Sand-Kugelschale gilt nach Umdruck S. 10

$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_2}{R_\lambda}; \qquad R_\lambda = \frac{1}{4\ \pi\ \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und umgestellt nach dem gesuchten Wärmeleitkoeffizienten des Sandes ergibt sich

$$\lambda = \frac{\dot{Q}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}{4\ \pi\ (t_1 - t_2)} \ .$$

Die gegebenen Zahlenwerte liefern

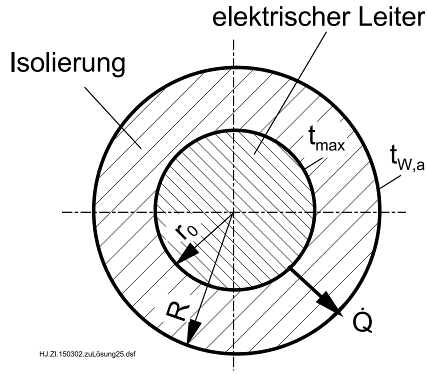
$$\lambda = 0,338\ \frac{\text{W}}{\text{m K}} \ .$$

Lösung 2.5

Gegeben: Langes Kabel
$r_0 = 0{,}01$ m, $\lambda_1 = 230$ W/(m K); $\varrho_{el} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Ω cm
Isolierung
$R = 0{,}03$ m; $\lambda_2 = 0{,}35$ W/(m K); $t_{W,a} = 0$ ^{o}C;
$t_{max} = 60$ ^{o}C

Gesucht: a) zulässige Stromstärke
b) $t(r = 0)$

a) Der durch den elektrischen Stromfluß freigesetzte Wärmestrom $\dot{Q}$ im elektrischen Leiter wird über die Isolierung nach außen geleitet.



$$\dot{Q} = I_{max}^2 \; R_\Omega = \frac{t_{max} - t_{W,a}}{R_{\lambda,Is}}$$

$$I_{max} = \sqrt{\frac{t_{max} - t_{W,a}}{R_\Omega \; R_{\lambda,Is}}}$$

nur positive Wurzel physikalisch sinnvoll)

Mit $\quad R_\Omega = \dfrac{\varrho_{el} \; L}{A} = \dfrac{\varrho_{el} \; L}{\pi \; r_0^2}$

(Ohmscher Widerstand des elektrischen Leiters)

und $\quad R_{\lambda,is} = \dfrac{1}{2 \; \pi \; L \; \lambda_2} \; \ln \dfrac{R}{r_0}$

(Wärmeleitwiderstand der Kabelisolierung)

folgt

$$I_{max} = \pi \; r_0 \sqrt{\frac{2 \; \lambda_2 \; (t_{max} - t_{W,a})}{\varrho_{el} \; \ln \dfrac{R}{r_0}}} = \pi \; 0,01 \text{ m} \sqrt{\frac{2 \cdot 0,35 \; \dfrac{\text{W}}{\text{m K}} \; (60 - 0) \text{ K}}{2,5 \cdot 10^{-8} \; \Omega \text{ m} \ln \dfrac{0,03 \text{ m}}{0,01 \text{ m}}} \; \frac{1 \; \Omega}{1 \; \dfrac{\text{W}}{\text{A}^2}}}$$

$$I_{max} = 1228,5 \text{ A}.$$

b) Die Fouriersche Differentialgleichung des Temperaturfeldes

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \; \nabla^2 t + \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\varrho \; c_p} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\varrho \; c_p}$$

geht im vorliegenden Fall (stationär, eindimensional) über in die gewöhnliche Dgl.

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{dt}{dr} + \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{\lambda_1} = 0\ .$$

Die Wärmequelldichte im elektrischen Leiter ergibt sich aus

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\dot{Q}}{V} = \frac{I^2_{max}\ \varrho_{el}\ L}{\pi\ r_0^2\ \pi\ r_0^2\ L} = \frac{I^2_{max}\ \varrho_{el}}{\pi^2\ r_0^4}.$$

Die obige Dgl. läßt sich mit Beachtung der Produktregel schreiben

$$\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\ \left(r\ \frac{dt}{dr}\right) + \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{\lambda_1} = 0$$

Mit Trennung der Variablen wird die Integration möglich:

$$\int d\left(r\ \frac{dt}{dr}\right) = -\int \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{\lambda_1}\ r\ dr$$

$$r\ \frac{dt}{dr} = -\ \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{2\ \lambda_1}\ r^2 + C_1 \qquad \text{(nach 1. Integration)}$$

$$\int dt = \int \left(-\ \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{2\ \lambda_1}\ r + \frac{C_1}{r}\right)\ dr$$

$$t = -\ \frac{\dot{\tilde{q}}_i\ r^2}{4\ \lambda_1} + C_1\ \ln\ r + C_2 \qquad \text{(nach 2. Integration)}$$

Die Konstanten lassen sich aus den beiden Randbedingungen ermitteln:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)_{r=0} = 0\ \text{(Symmetriebedingung)} \Rightarrow\ C_1 = 0$$

$$t(r = r_0) = t_{max} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = t_{max} + \frac{\dot{\tilde{q}}_i\ r_0^2}{4\ \lambda_1}$$

Damit folgt für die Temperaturverteilung im elektrischen Leiter

$$t(r) = t_{max} + (r_0^2 - r^2)\ \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{4\ \lambda_1}$$

Die Temperatur in der Kabelachse ergibt sich zu

$$t(r = 0) = t_{max} + \frac{I^2_{max}\ \varrho_{el}}{4\ \lambda_1\ \pi^2\ r_0^2} = 60\ ^o\text{C} + \frac{1228,5^2\ \text{A}^2\ 2,5 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}}{4 \cdot 230\ \dfrac{\text{W}}{\text{m K}}\ \pi^2\ 0,01^2\ \text{m}^2}\ \frac{1\ \dfrac{\text{W}}{\Omega}}{1\ \text{A}^2}$$

$$t(r = 0) = 60,04\ ^o\text{C}.$$

Lösung 2.6

Gegeben: Wasserdurchströmtes Stahlrohr mit Isolierung

$d_i = 200$ mm $\quad d_a = 210$ mm $\quad \delta_{Is} = 100$ mm

$\lambda_{St} = 50$ W/(m K) $\quad \lambda_{Is} = 0{,}06$ W/(m K)

$\alpha_i = 300$ W/(m^2 K) $\quad \alpha_a = 20$ W/(m^2 K)

$t_i = 110$ ^{o}C $\quad t_a = 20$ ^{o}C

Gesucht: a) Wärmetransportwiderstände,
b) längenbezogener Wärmestrom,
c) innere und äußere Wandtemperatur,
d) relativer Fehler bei ausschließlicher Berücksichtigung der Isolierung

a) Die Widerstände werden für $L = 1$ m Rohrlänge berechnet

$$R_{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i\ \pi\ d_i\ L} = 0,005305\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\alpha_a} = \frac{1}{\alpha_a\ \pi\ (d_a + 2\ \delta_{Is})\ L} = 0,03882\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,St} = \frac{\ln\left(\dfrac{d_a}{d_i}\right)}{\pi\ L\ 2\ \lambda_{St}} = 1,553 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,Is} = \frac{\ln \dfrac{d_a + 2\ \delta_{Is}}{d_a}}{\pi\ L\ 2\ \lambda_{Is}} = 1,775\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Der Gesamtwiderstand für 1 m Rohrlänge beträgt

$$R_k = R_{\alpha_i} + R_{\lambda,St} + R_{\lambda,Is} + R_{\alpha_a} = 1,819\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Für den Wärmedurchgangskoeffizient ergibt sich für 1 m Rohrlänge

$$k_i = \frac{1}{R_k\ A_i} = \frac{1}{R_k\ \pi\ d_i\ L} = 0,875\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

b) Der längenbezogene Wärmestrom, der vom Rohr an die Umgebung abgegeben wird, beträgt

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{t_i - t_a}{L\ R_k} = 49,48\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

c) Die Oberflächentemperaturen berechnen sich am einfachsten, wenn von der Innen- bzw. Außentemperatur ausgegangen und der Wärmeübergang berücksichtigt wird.

$$t_{W,a} = t_a + \frac{\dot{Q}/L}{\alpha_a\ \pi\ (d_a + 2\ \delta_{Is})} = 21,92\ ^o\mathrm{C}$$

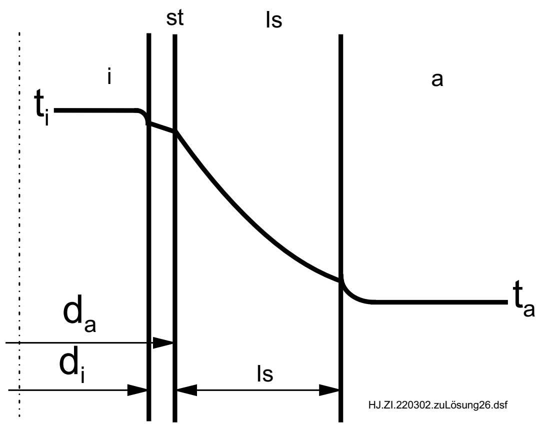
$$t_{W,i} = t_i - \frac{\dot{Q}/L}{\alpha_i\ \pi\ d_i} = 109,73\ ^o\mathrm{C}$$

d) Der längenbezogene Wärmestrom für den Fall, daß nur die Isolierung berücksichtigt wird, beträgt

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{t_i - t_a}{L\ R_{\lambda,Is}} = 50,712\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

und damit tritt folgender Fehler auf

$$f = \mid \frac{\Delta\dot{Q}}{\dot{Q}} \mid \cdot 100\% = \frac{50,712 - 49,48}{49,48} \cdot 100\% = 2,49\%$$



Gegeben: Naßdampfdurchströmtes Stahlrohr mit Isolierung

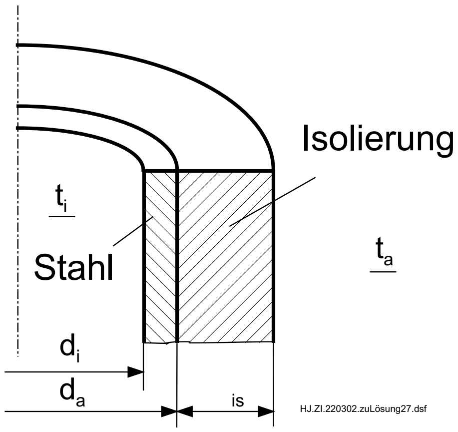
$d_i = 200$ mm $\quad d_a = 220$ mm
$\delta_{Is} = 150$ mm $\quad L = 10$ m
$\lambda_{Is} = 0{,}15$ W/(m K) $\quad \alpha_a = 20$ W/(m^2 K)
$R_{\alpha,i} = R_{\lambda,Rohr} = 0 \quad w_E = 0{,}8$ m/s, $\quad t_a = 20\ ^o$C
$p = 0{,}5$ MPa $\quad x_E = 1{,}0$
$t_S = 151,9\ ^o$C $\quad r = 2108$ kJ/kg $\quad v'' = 0,3748$ m^3/kg

Gesucht: a) x_A
b) x_A bei $\delta_{Is} = 105$ mm

a) Mit $p = 0{,}5$ MPa folgt aus der Sättigungstafel:

$t_i = t_s(p) = 151,9\ ^o$C

Der Wärmestrom vom Naßdampf über die Rohrwand an die Umgebung ist



$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_a}{R_k}$$

$$R_k = R_{\alpha_i} + R_{\lambda,St} + R_{\lambda,Is} + R_{\alpha_a}$$

$$R_k = \frac{1}{\pi\ L}\left(\frac{1}{2\ \lambda_{Is}}\ \ln\frac{d_a + 2\ \delta_{Is}}{d_a} + \frac{1}{\alpha_a\ (d_a + 2\ \delta_{Is})}\right)$$

$$R_k = \frac{1}{\pi\ 10\ \text{m}}\left(\frac{1}{2 \cdot 0,15\ \text{W/(m K)}}\ \ln\frac{0,22 + 2 \cdot 0,15}{0,22} + \frac{1}{20\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}(0,22 + 2 \cdot 0,15\ \text{m}}\right)$$

$$R_k = 0,094331\ \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Die Zahlenwerte liefern für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = 1398,27\ \text{W}.$$

Die abgegebene Wärme führt zu einer teilweisen Kondensation des Dampfes und somit zur Verringerung des Dampfanteils x. Die Energiebilanz für das durchströmte Stahlrohr lautet

$$\dot{Q} = \dot{H}_E - \dot{H}_A$$

$$\dot{Q} = \dot{m}\ (h_E - h_A) = \dot{m}\ (x_E - x_A)\ (h''(p) - h'(p))\ .$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \varrho\ w\ A = \frac{1}{v''}\ w_E\ \frac{\pi}{4}\ d_i^2 = \frac{0,8\ \text{m/s}\ \pi\ 0,2^2\ \text{m}^2}{0,3748\ \text{m}^3/\text{kg}\ 4} = 0,067056\ \text{kg/s}$$

und
$h'' - h' = r(p)$

sowie $\left.\begin{array}{l} r = 2108\ \text{kJ/kg} \\ v'' = 0,3748\ \text{m}^3/\text{kg} \end{array}\right\}$ aus Sättigungstafel
folgt

$$x_A = x_E - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}\ r} = x_E - \frac{4\ v''\ \dot{Q}}{r\ w_E\ \pi\ d_i^2} = 1 - \frac{4 \cdot 0,3748\ \text{m}^3/\text{kg}\ 1398,27\ \text{W}}{2108 \cdot 10^3\ \text{J/kg}\ 0,8\ \text{m/s}\ \pi\ 0,2^2\ \text{m}^2}$$

x_A = 0,9901

b) Mit den gleichen Beziehungen wie unter Teilaufgabe a) und nur veränderter Isolierstärke ergibt sich

$$R_k = 0,074044\ \frac{\text{K}}{\text{W}}; \qquad \dot{Q} = 1781,37\ \text{W}; \qquad x_A = 0,9874.$$

Wie zu erwarten war, vergrößert sich wegen der geringeren Isolierstärke der abgegebene Wärmestrom und der Dampfgehalt am Austritt nimmt ab.

Lösung 2.8

Gegeben: Mehrschichtige, ebene Wand

$\delta_1 = 150$ mm $\qquad \lambda_1 = 4$ W/(m K)
$\delta_2 = 300$ mm $\qquad \lambda_2 = (0,5 + t/2200\ ^o\text{C})$ W/(m K)
$\delta_3 = 4$ mm $\qquad \lambda_3 = 20$ W/(m K)
$t_i = 1400\ ^o$C $\qquad t_a = 20\ ^o$C
$\alpha_i = 100$ W/(m^2 K) $\qquad \alpha_a = 20$ W/(m^2 K)

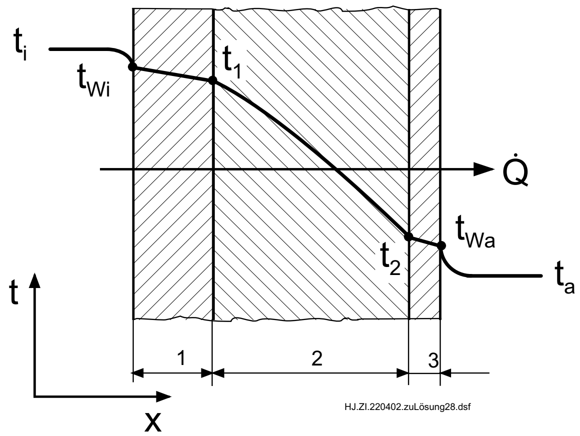
Gesucht: a) Qualitativer Temperaturverlauf in der Wand,
b) flächenspezifischer Wärmestrom $\hat{\dot{q}}$ durch die Wand

a) Da ein stationärer Wärmetransport stattfindet, muß gelten

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_i - t_{W,i}}{\frac{1}{\alpha_i}} = \frac{t_{W,i} - t_1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}}$$

$$= \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{t_2 - t_{W,a}}{\frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

$$= \frac{t_{W,a} - t_a}{\frac{1}{\alpha_a}}.$$



Mit den gegebenen Größen wird

$$\frac{1}{\alpha_i} = 0,01\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}}; \qquad \frac{\delta_1}{\lambda_1} = 0,0375\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}};$$
$$\frac{\delta_2}{\lambda_2} = 0,365\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}}; \qquad \frac{\delta_3}{\lambda_3} = 2 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}}; \qquad \frac{1}{\alpha_a} = 0,05\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}}.$$

Geordnet ergeben sich die Ungleichungen

$$\frac{\delta_3}{\lambda_3} < \frac{1}{\alpha_i} < \frac{\delta_1}{\lambda_1} < \frac{1}{\alpha_a} < \frac{\delta_2}{\lambda_2}$$
$$(t_2 - t_{W,a}) < (t_i - t_{W,i}) < (t_{W,i} - t_1) < (t_{W,a} - t_a) < (t_1 - t_2).$$

Für das temperaturabhängige λ_2 wurde als 1. Näherung angenommen:

$$\lambda_2(t_m = 710\ ^o\text{C}) = 0,822\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

Entsprechend den Ungleichungen ergibt sich das Temperaturprofil im obigen Bild.

b) Der Wärmestrom in der Schamotteschicht ergibt sich wegen der Temperaturabhängigkeit von $\lambda_2 = \lambda_0 + a\ t$ aus der Integration der Fourierschen Wärmeleitgleichung

$$\hat{\dot{q}}_2 = -\lambda_2(t)\ \frac{dt}{dx} = -(\lambda_0 + a\ t)\ \frac{dt}{dx}$$

$$\hat{\dot{q}}_2 \int\limits_0^{\delta_2} dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} (\lambda_0 + a\ t)\ dt$$

$$\hat{\dot{q}}_2 = -\frac{1}{\delta_2}\ \left[\lambda_0\ (t_2 - t_1) + \frac{a}{2}\ \left(t_2^2 - t_1^2\right)\right] \tag{1}$$

$$\hat{\dot{q}}_2 = -\frac{1}{\delta_2}\ \left[\lambda_0 + \frac{a}{2}\ (t_2 + t_1)\right](t_2 - t_1) = -\frac{1}{\delta_2}\ \lambda_{2,m}(t_m)(t_2 - t_1). \tag{2}$$

Die mittlere Wärmeleitfähigkeit für die Schicht 2 ergibt sich somit aus dem Ansatz

$$\lambda_{2,m} = (0,5 + t_{2,m}/2200\ {}^o\mathrm{C})\ \mathrm{W/(m\ K)} \tag{3}$$

mit der mittleren Temperatur $t_{2,m} = 0,5\ (t_1 + t_2)$.

Die Temperaturen t_1 und t_2 sind jedoch noch unbekannt. Für die Schichten links und rechts der Schamottewand gilt:

$$\hat{\dot{q}}_1 = \frac{t_i - t_1}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{\delta_1}{\lambda_1}} \qquad (4), \qquad \hat{\dot{q}}_3 = \frac{t_2 - t_a}{\dfrac{\delta_3}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\alpha_a}}. \tag{5}$$

Wegen der Kontinuität des Wärmestromes gilt weiterhin

$$\hat{\dot{q}}_1 = \hat{\dot{q}}_2 = \hat{\dot{q}}_3 = \hat{\dot{q}} \tag{6}$$

bzw.

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_i - t_a}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_{2,m}} + \dfrac{\delta_3}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\alpha_a}}. \tag{7}$$

Die Gln.(2), (4) und (5) mit den 3 Unbekannten $\hat{\dot{q}}$, t_1 und t_2 müssen nun gelöst werden. Im vorliegenden Fall geht dies am einfachsten durch eine iterative Rechnung. Folgende Schritte sind dabei abzuarbeiten:

1. Annahme einer mittleren Temperatur $t_{2,m}$ für die Schamottewand
2. Berechnung von $\lambda_{2,m}$ aus Gl.(3)
3. Berechnung von $\hat{\dot{q}}$ nach Gl.(7)
4. Berechnung von t_1 und t_2 aus den Gln.(4) und (5)

$$t_1 = t_i - \hat{\dot{q}} \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right) \quad (8), \quad t_2 = t_a + \hat{\dot{q}} \left(\frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a} \right) \qquad (9)$$

5. Kontrolle der angenommenen mittleren Temperatur für die Schamotteschicht $t_{2,m} = 0,5\ (t_1 + t_2)$
6. Wiederholung der Rechnung bis erforderliche Genauigkeit erreicht ist.

Die Benutzung der Gl.(7) statt der Gl.(2) im 3. Schritt erleichtert die iterative Rechnung, da die Temperaturen t_i und t_a bekannt sind, die Temperaturen t_1 und t_2 in Gl.(2) aber noch nicht.

Beispiel:

1. Iteration:	$t_{2,m}$	$= 0,5\ (1400 + 20)\ ^o\mathrm{C} = 710\ ^\circ\mathrm{C}$
	$\lambda_{2,m}$	$= 0{,}8227\ \mathrm{W/(m\ K)}$
	$\hat{\dot{q}}$	$= 2984,7\ \mathrm{W/m^2},\ t_1 = 1258,22\ ^o\mathrm{C},\ t_2 = 169,84\ ^o\mathrm{C}$
	$t_{2,m}$	$= 714,03\ ^o\mathrm{C}$
2. Iteration:	$t_{2,m}$	$= 714,03\ ^o\mathrm{C},\ \lambda_{2,\mathrm{m}} = 0,824558\ \mathrm{W/(m\ K)}$
	$\hat{\dot{q}}$	$= 2990,05\ \mathrm{W/m^2},\ t_1 = 1257,97\ ^o\mathrm{C},\ t_2 = 170,10\ ^o\mathrm{C}$
	$t_{2,m}$	$= 714,035\ ^o\mathrm{C}.$

Die Iteration führt im vorliegenden Fall sehr schnell zum Ziel, da der Startwert schon sehr gut war. Aber auch in anderen Fällen ist das angegebene Iterationsschema sehr effektiv.

Das Gleichungssystem (1), (4) und (5) kann auch exakt gelöst werden. Dazu sind einige Umformungen notwendig. Nach Einsetzen der Temperaturen t_1 und t_2 (Gln.(8) und (9)) in Gl.(1) erhält man nach einigen Umformungen die folgende quadratische Gleichung für $\hat{\dot{q}}$

$$K_1\ \hat{\dot{q}}^2 + K_2\ \hat{\dot{q}} + K_3 = 0$$

mit

$$K_1 = \frac{a}{2\ \delta_2}\ (B^2 - A^2)$$

$$K_2 = 1 + \frac{\lambda_0}{\delta_2}\ (A+B) + \frac{a}{\delta_2}\ (t_a\ B + t_i\ A)$$

$$K_3 = \frac{\lambda_0}{\delta_2}\ (t_a - t_i) + \frac{a}{2\ \delta_2}\ (t_a^2 - t_i^2)$$

$$A = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \qquad B = \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a}.$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet (nur positive Wurzel liefert einen physikalisch sinnvollen Wert)

$$\hat{\dot{q}} = -\ \frac{K_2}{2\ K_1} + \sqrt{\left(\frac{K_2}{2\ K_1}\right)^2 - \frac{K_3}{K_1}}.$$

Mit den Werten $\lambda_0 = 0,5$ W/(m K) und $a = 1/2200$W/(m K^2) sowie

$A = 0,0475$ m^2 K/W und $B = 0,0502$ m^2 K/W wird

$K_1 = 1,9984091 \cdot 10^{-7}$ m^2/W, $K_2 = 1,2651121$ und $K_3 = -\ 3784,545$ W/m^2

und damit $\hat{\dot{q}} = 2990,05$ W/m^2.

Lösung 2.9

Gegeben: Betonwand mit Außenisolierung und Putz

$\delta_B = 0{,}16$ m $\quad \lambda_B = 0{,}8$ W/(m K)
$\delta_{Is} = 0{,}06$ m $\quad \lambda_{Is} = 0{,}05$ W/(m K)
$\delta_P = 0{,}01$ m $\quad \lambda_P = 0{,}8$ W/(m K)
$t_i = 22\ ^o$C $\quad t_a = 5\ ^o$C
$\alpha_i = 5$ W/(m^2 K) $\quad \alpha_a = 20$ W/(m^2 K)

Von außen zugeführter Wärmestrom infolge Sonneneinwirkung $\hat{\dot{q}}_S = 400$ W/m^2

Gesucht: Wärmestromdichte durch die Wand und Temperaturverlauf in der Wand ohne b) und mit Sonneneinwirkung c)

a) Wärmestromdichte $\hat{\dot{q}}$ durch die Wand (ohne Sonneneinwirkung)

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_i - t_a}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{\delta_B}{\lambda_B} + \dfrac{\delta_{Is}}{\lambda_{Is}} + \dfrac{\delta_P}{\lambda_P} + \dfrac{1}{\alpha_a}}$$

$$= \frac{(22-5)\ \mathrm{K}}{\dfrac{1}{5\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}} + \dfrac{0,16\ \mathrm{m}}{0,8\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{0,06\ \mathrm{m}}{0,05\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{0,01\ \mathrm{m}}{0,8\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{1}{20\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}}}$$

$$= 10,226\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

b) Temperaturverlauf
Vergleich der einzelnen Widerstände

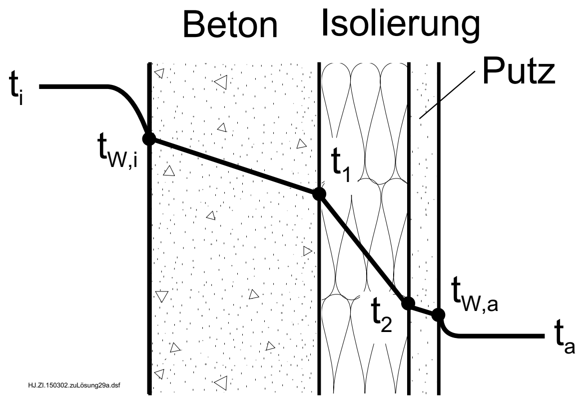
$R_{\lambda,P} < R_{\alpha,a} < R_{\alpha,i} = R_{\lambda,B} < R_{\lambda,Is}$

liefert wegen $\dot{Q} = \dfrac{\Delta t_i}{R_i}$

$\Delta t_p < \Delta t_a < \Delta t_i = \Delta t_B < \Delta t_{IS}$

Vergleich der Anstiege in der Wand

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_P = \left(\frac{dt}{dx}\right)_B < \left(\frac{dt}{dx}\right)_{Is}$$



Die Temperaturen betragen

$$t_{W,i} = t_i - \frac{\hat{\dot{q}}}{\alpha_i} = 22\ {}^o\text{C} - \frac{10,226\ \text{W/m}^2}{5\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}} = 19,95\ {}^o\text{C}$$

$$t_1 = t_{W,i} - \frac{\dot{q}\ \delta_B}{\lambda_B} = 19,95 - \frac{10,226\ \text{W/m}^2\ 0,16\ \text{m}}{0,8\ \text{W/(m K)}} = 17,91\ {}^o\text{C}$$

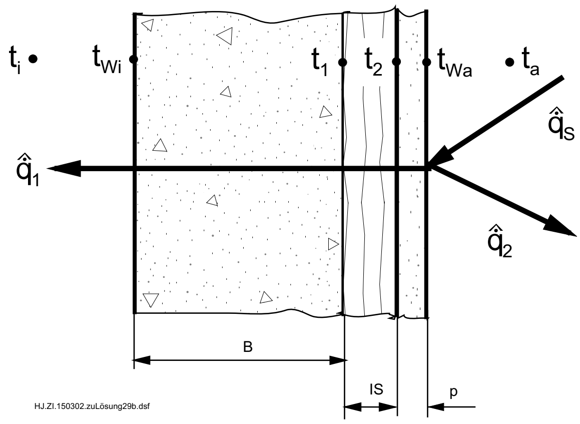
$$t_{W,a} = t_a + \frac{\hat{\dot{q}}}{\alpha_a} = 5\ {}^o\text{C} + \frac{10,226\ \text{W/m}^2}{20\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}} = 5,51\ {}^o\text{C}$$

$$t_2 = t_{W,a} + \frac{\dot{q}\ \delta_P}{\lambda_P} = 5,51\ {}^o\text{C} + \frac{10,226\ \text{W/m}^2 \cdot 0,01\ \text{m}}{0,8\ \text{W/(m K)}} = 5,64\ {}^o\text{C}$$

c) Es wird angenommen, daß $t_{W,a} > t_i$ wird.
Die Energiestrombilanz lautet dafür:
$\dot{Q}_S = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ bzw. $\hat{\dot{q}}_S = \hat{\dot{q}}_1 + \hat{\dot{q}}_2$ (1)
Auf Grund der Sonneneinwirkung ist die Wärmestromdichte zwischen innen und außen nicht gleich. Deshalb müssen die beiden Bereiche 1 und 2 getrennt berechnet werden.

$$\hat{\dot{q}}_1 = \frac{t_{W,a} - t_i}{\frac{\delta_P}{\lambda_P} + \frac{\delta_{Is}}{\lambda_{Is}} + \frac{\delta_B}{\lambda_B} + \frac{1}{\alpha_i}} = \frac{t_{W,a} - t_i}{R_1\ A} \qquad (2)$$

$$\hat{\dot{q}}_2 = \frac{t_{W,a} - t_a}{\frac{1}{\alpha_a}} = \frac{t_{W,a} - t_a}{R_2\ A} \qquad (3)$$



Nach Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt sich die äußere Wandtemperatur zu

$$t_{W,a} = \frac{\hat{\dot{q}}_S + \frac{t_i}{R_1\ A} + \frac{t_a}{R_2\ A}}{\frac{1}{R_1\ A} + \frac{1}{R_2\ A}}$$

$$R_1\ A = \frac{0,01\ \text{m}}{0,8\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}} + \frac{0,06\ \text{m}}{0,05\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}} + \frac{0,16\ \text{m}}{0,8\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}} + \frac{1\ \text{m}}{5\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}} = 1,6125\ \frac{\text{m}^2\ \text{K}}{\text{W}}$$

$$R_2\ A = \frac{1}{20\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}} = 0,05\ \frac{\mathrm{m^2\ K}}{\mathrm{W}}$$

$$t_{W,a} = \frac{400\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} + \dfrac{22\ ^\circ\mathrm{C}}{1,6125\ \dfrac{\mathrm{m^2\ K}}{\mathrm{W}}} + \dfrac{5\ ^\circ\mathrm{C}}{0,05\ \dfrac{\mathrm{m^2\ K}}{\mathrm{W}}}}{\left(\dfrac{1}{1,6125} + \dfrac{1}{0,05}\right)\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}} = 24,91\ ^\circ\mathrm{C}$$

Da $t_{W,a} > t_i$ ist, geht ein Wärmestrom von außen nach innen und es tritt über der Wand kein Wärmeverlust des Gebäudes auf.
Wenn bei der obigen Berechnung von der Annahme $t_{W,a} < t_i$ ausgegangen worden wäre, ergibt sich natürlich der gleiche Zahlenwert für $t_{W,a}$. Der berechnete Wert für $\hat{\dot{q}}_1$ wäre allerdings negativ, da dann der Wärmestrom anders als angenommen gerichtet ist.

Mit den Gleichungen (2) und (3) folgt nach Einsetzen der Werte

$$\hat{\dot{q}}_1 = 1,804\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}; \qquad \hat{\dot{q}}_2 = 398,2\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

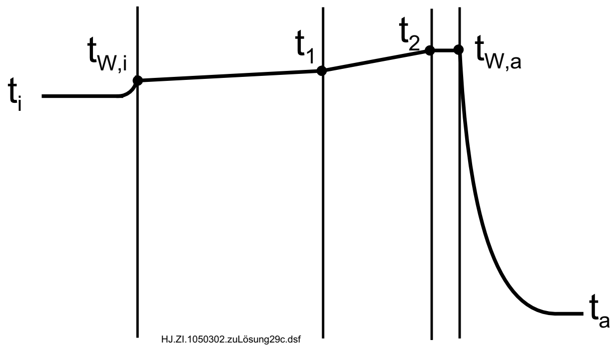
Die restlichen Temperaturen ergeben sich aus

$$t_{W,i} = t_i + \frac{\hat{\dot{q}}_1}{\alpha_1} = 22,36\ ^o\mathrm{C}$$

$$t_1 = t_{W,i} + \frac{\hat{\dot{q}}_1\ \delta_B}{\lambda_B} = 22,72\ ^o\mathrm{C}$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\hat{\dot{q}}_1\ \delta_{Is}}{\lambda_{Is}} = 24,89\ ^o\mathrm{C}$$

Den qualitiven Temperaturverlauf in der Wand zeigt die folgende Skizze.

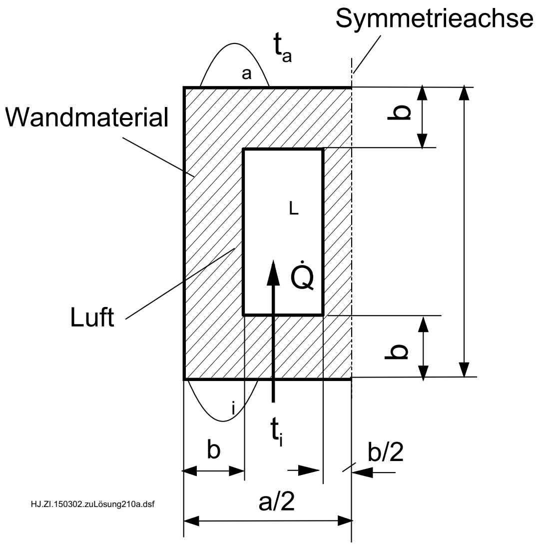


Lösung 2.10

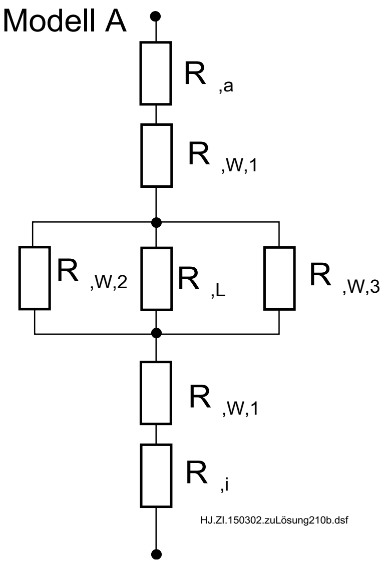
Gegeben: Mauer aus Hohlblocksteinen
Höhe $H = 2{,}4$ m, Breite $B = 3{,}6$ m, Dicke $\delta = 0{,}24$ m
Abmessungen eines Steines $a = 0{,}36$ m, $h = 0{,}24$ m, $\delta = 0{,}24$ m $b = 0{,}05$ m
Wärmeleitkoeffizient Wandmaterial $\lambda_W = 0{,}6$ W/(m K),
Luft $\lambda_L = 0{,}08$ W/(m K)
Umgebungstemperaturen $t_i = 20$ ^{o}C, $t_a = -5$ ^{o}C
Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_i = 5$ W/(m^2 K), $\alpha_\mathrm{a} = 15$ W/(m^2 K)

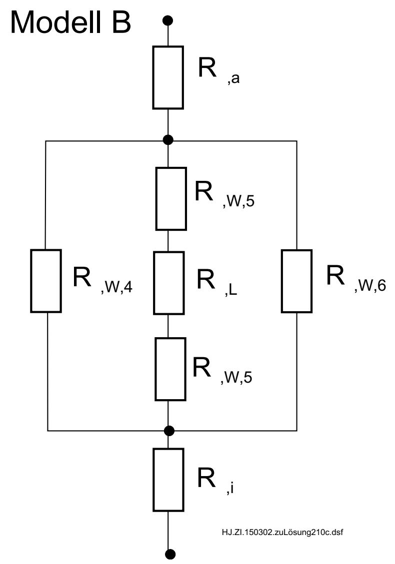
Gesucht: a) Wärmedurchgangskoeffizient k nach 2 Modellen
b) Wärmestrom $\dot{Q}$ durch Wand nach 2 Modellen
c) Wärmestrom $\dot{Q}$ durch Wand mit Vollsteinen

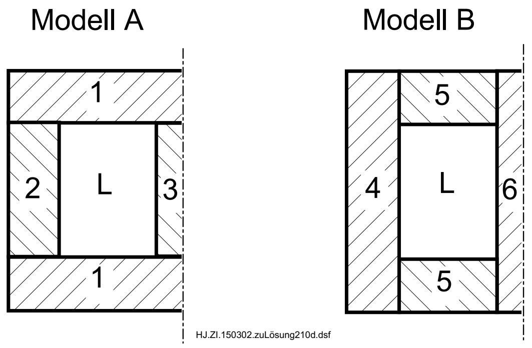
Aus Symmetriegründen braucht nur ein halber Stein betrachtet zu werden.



Ersatzschaltbilder:







Modell A: Es wird angenommen, daß in der Schicht 1 eine einheitliche Temperatur in Querrichtung vorliegt. Das bedeutet, daß für den Wärmetransport in Querrichtung kein Widerstand auftritt (unendlich große Wärmeleitfähigkeit).

Modell B: Es wird angenommen, daß in den beiden äußeren Wandschichten keine Wärmeleitung in Querrichtung auftritt (vernachlässigbar geringe Wärmeleitfähigkeit). Zwischen Schicht 4 und 5 bzw. zur eingeschlossenen Luft erfolgt kein Wärmetransport.

In der Realität ist die Wärmestromdichte in der Schicht 1 nicht konstant über dem Querschnitt. Im Bereich über der eingeschlossenen Luftschicht tritt eine kleinere Wärmestromdichte auf als über der Schicht 2. Durch die dadurch entstehenden Temperaturgradienten in Querrichtung kommt auch ein Wärmestrom in Querrichtung (z. B. von Schicht 5 zu Schicht 4) zustande. Das realistische Ergebnis liegt zwischen den beiden Modellen A und B.

a) Wärmedurchgangskoeffizient k für die gesamte Wand

$$k = \frac{1}{A\ R_k}, \qquad A = B\ H$$

Anzahl der Steine in der gesamten Wand

$$n = \frac{H\ B}{h\ a} = \frac{2,4\ \mathrm{m}\ 3,6\ \mathrm{m}}{0,24\ \mathrm{m}\ 0,36\ \mathrm{m}} = 100$$

Wärmedurchgangswiderstand für die gesamte Wand (Parallelschaltung der Widerstände für alle halben Steine)

$$R_k = \frac{R}{2\ n}$$

R Wärmedurchgangswiderstand für einen halben Stein (laut Skizze).

Damit wird

$$k = \frac{2\ H\ B}{B\ H\ R\ a\ h} = \frac{2}{R\ a\ h}$$

Zu diesem Ergebnis kommt man auch sofort, wenn der Wärmedurchgangskoeffizient für einen halben Stein berechnet wird. Da k flächenbezogen ist, sind verschiedene Herleitungen möglich.

Modell A:

$$R_A = R_{\alpha_i} + R_{\lambda,W,1} + \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda,W,2}} + \dfrac{1}{R_{\lambda,L}} + \dfrac{1}{R_{\lambda,W,3}}} + R_{\lambda,W,1} + R_{\alpha_a}$$

Modell B:

$$R_B = R_{\alpha_i} + \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda,W,4}} + \dfrac{1}{2R_{\lambda,W,5} + R_{\lambda,L}} + \dfrac{1}{R_{\lambda,W,6}}} + R_{\alpha_a}$$

Die Wärmedurchgangswiderstände ergeben sich aus einer Reihen- und Parallelschaltung der einzelnen Teilwiderstände:

Reihenschaltung $\qquad R = \sum R_i$

Parallelschaltung $\qquad R = \dfrac{1}{\sum \dfrac{1}{R_i}}$

Die einzelnen Teilwiderstände betragen:

$$R_{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_i\ \dfrac{a}{2}\ h} = \frac{1}{5\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 0,18\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 4,6296\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\alpha_a} = \frac{1}{\alpha_a\ \dfrac{a}{2}\ h} = \frac{1}{15\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 0,18\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 1,5432\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,W,1} = \frac{b}{\lambda_W\ \dfrac{a}{2}\ h} = \frac{0,05\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,18\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 1,9290\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,W,2} = \frac{\delta - 2\ b}{\lambda_W\ b\ h} = \frac{0,14\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,05\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 19,4444\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

2.10/4

$$R_{\lambda,W,3} = \frac{\delta - 2\,b}{\lambda_W\,\dfrac{b}{2}\,h} = \frac{0,14\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,025\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 38,8889\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,W,4} = \frac{\delta}{\lambda_W\ b\ h} = \frac{0,24\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,05\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 33,3333\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,W,5} = \frac{b}{\lambda_W\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{3}{2}\,b\right)\,h} = \frac{0,05\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,105\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 3,3069\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda,W,6} = \frac{\delta}{\lambda_W\,\dfrac{b}{2}\,h} = \frac{0,24\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,025\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 66,6667\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

$$R_{\lambda_L} = \frac{\delta - 2\,b}{\lambda_L\ \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{3}{2}\,b\right)\,h} = \frac{0,14\ \mathrm{m}}{0,08\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,105\ \mathrm{m}\ 0,24\ \mathrm{m}} = 69,4444\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Damit wird für den Wärmewiderstand für einen halben Stein nach den beiden Modellen

$$R_A = 20,9546\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}, \qquad R_B = 23,3703\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

und für den Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k_A = 1,1047\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}, \qquad k_B = 0,9905\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}.$$

Die Ergebnisse nach den beiden Modellen unterscheiden sich nur um etwa 10 %. Das Modell B liefert den minimalen Wert, da keine Wärmeleitung in Querrichtung zugelassen wird.

Modell A liefert den maximalen Wert, da kein Widerstand für die Wärmeleitung in Querrichtung angenommen wird. Mit einem Mittelwert aus den beiden Modellen liegt man sehr nahe an dem realistischen Wert, der jedoch nur durch eine zweidimensionale Berechnung (z. B. mit Temperaturfeldprogrammen) mit wesentlich größerem Aufwand ermittelt werden kann.

b) Wärmestrom durch die gesamte Wand

$$\dot{Q} = k\ B\ H\ (t_i - t_a)$$

Modell A

$$\dot{Q}_A = 1,1047\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 3,6\ \mathrm{m} \cdot 2,4\ \mathrm{m}\ (20 + 5)\ \mathrm{K} = 238,6\ \mathrm{W}$$

2.10/5

Modell B

$$\dot{Q}_B = 0,9905\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 3,6\ \mathrm{m} \cdot 2,4\ \mathrm{m}\ (20+5)\ \mathrm{K} = 213,9\ \mathrm{W}$$

c) Wärmestrom durch Wand aus Vollsteinen

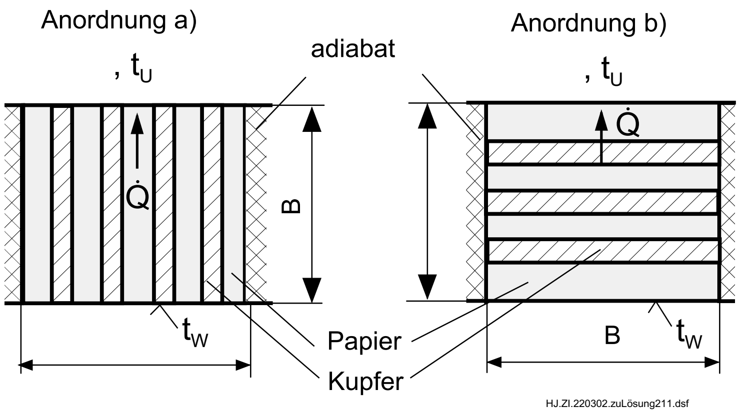
$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_a}{\dfrac{1}{B\ H}\ \left(\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{\delta}{\lambda_W} + \dfrac{1}{\alpha_a}\right)}$$

$$= \frac{(20+5)\ K}{\dfrac{1}{3,6\ \mathrm{m}\ 2,4\ \mathrm{m}}\ \left(\dfrac{1}{5\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}} + \dfrac{0,24\ \mathrm{m}}{0,6\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{1}{15\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}}\right)} = 324\ \mathrm{W}.$$

Gegeben: Paket aus mehreren Schichten Kupferblech und Papier
Abmessungen $L = B = \delta = 0{,}2$ m
Kupfer $\lambda_K = 372$ W/(m K)
Papier $\lambda_P = 0{,}12$ W/(m K), $\varphi = 0{,}7$
Wandtemperatur $t_W = 200$ ^{o}C
Umgebung $t_U = 20$ ^{o}C, $\alpha = 10$ W/(m^2 K)

Gesucht: Effektiver Wärmeleitkoeffizient λ_{eff}
übertragener Wärmestrom $\dot{Q}$
für Wärmestrom a) längs der Bleche und b) quer zu den Blechen

In der Aufgabe sind die Reihen- und Parallelschaltung von vielen gleichartigen Widerständen zu betrachten. Es kann eine eindimensionale Wärmeleitung durch das Paket angenommen werden, da die Seitenflächen ideal isoliert sind (adiabate Wände). In der Anordnung a) strömt die Wärme längs der Bleche (Parallelschaltung), in der Anordnung b) quer zu den Blechen (Reihenschaltung).



a) Parallelschaltung von Widerständen im Paket

$$R_{ges} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_\lambda}} + R_\alpha$$

Widerstand der Kupferbleche

$$R_{\lambda,K} = \frac{B}{\lambda_K\ (1-\varphi)\ \delta\ L}$$

Widerstand des Papiers

$$R_{\lambda,P} = \frac{B}{\lambda_P \ \varphi \ \delta \ L}$$

Wärmeübergangswiderstand

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \ \delta \ L}$$

gesamter Widerstand

$$R_{ges} = \frac{1}{\frac{\delta \ L}{B} \ \lambda_K \ (1-\varphi) + \frac{\delta \ L}{B} \ \lambda_P \ \varphi} + \frac{1}{\alpha \ \delta \ L} = \frac{1}{\frac{\delta \ L}{B} \ [\lambda_K \ (1-\varphi) + \lambda_P \ \varphi]} + \frac{1}{\alpha \ \delta \ L}$$

$$= \frac{1}{\frac{0,2^2 \ \mathrm{m}^2}{0,2 \ \mathrm{m}} \left[372 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \ K}} \ (1-0,7) + 0,12 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \ K}} \ 0,7\right]} + \frac{1}{10 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \ K}} \ 0,2^2 \ \mathrm{m}^2}$$

$$= 2,545 \ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = \frac{t_W - t_U}{R_{ges}} = \frac{(200-20) \ \mathrm{K}}{2,545 \ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}} = 70,73 \ \mathrm{W}$$

effektiver Wärmeleitkoeffizient

$$R_{\lambda_{eff}} = \frac{B}{\lambda_{eff} \ \delta \ L} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_\lambda}}$$

$$\lambda_{eff} = \lambda_K \ (1-\varphi) + \lambda_P \ \varphi$$

$$= 372 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \ K}} \ (1-0,7) + 0,12 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \ K}} \ 0,7 = 111,7 \ \mathrm{W/(m \ K)}$$

b) Reihenschaltung der Widerstände

$$R_{ges} = \sum \ R_\lambda + R_\alpha$$

Da die Reihenfolge der Widerstände bei einer Reihenschaltung keine Rolle spielen, können die Dicken der jeweiligen Materialien addiert werden.

2.11/3

Widerstand der Kupferbleche

$$R_{\lambda,K} = \frac{(1-\varphi)\ \delta}{\lambda_K\ B\ L}$$

Widerstand des Papiers

$$R_{\lambda,P} = \frac{\varphi\ \delta}{\lambda_P\ B\ L}$$

Wärmeübergangswiderstand

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha\ B\ L}$$

gesamter Widerstand

$$R_{ges} = \frac{(1-\varphi)\ \delta}{\lambda_K\ B\ L} + \frac{\varphi\ \delta}{\lambda_P\ B\ L} + \frac{1}{\alpha\ B\ L}$$

$$R_{ges} = \frac{(1-0,7)\cdot 0,2\ \mathrm{m}}{372\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,2^2\ \mathrm{m}^2} + \frac{0,7\cdot 0,2\ \mathrm{m}}{0,12\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 0,2^2\ \mathrm{m}^2} + \frac{1}{10\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 0,2^2\ \mathrm{m}^2}$$

$$= 31,67\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = \frac{t_W - t_U}{R_{ges}} = \frac{(200-20)\ \mathrm{K}}{31,67\ \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}} = 5,683\ \mathrm{W}$$

effektiver Wärmeleitkoeffizient

$$R_{\lambda_{eff}} = \frac{\delta}{\lambda_{eff}\ B\ L} = \sum R_\lambda$$

$$\lambda_{eff} = \frac{\delta}{B\ L}\ \frac{1}{\dfrac{(1-\varphi)\ \delta}{\lambda_K\ B\ L} + \dfrac{\varphi\ \delta}{\lambda_p\ B\ L}} = \frac{1}{\dfrac{1-\varphi}{\lambda_K} + \dfrac{\varphi}{\lambda_P}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1-0,7}{372\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{0,7}{0,12\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}} = 0,1714\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}$$

Lösung 2.13

Gegeben: kugelförmiges Brennelement $r_1 = 11$ mm, $\lambda = 28$ W/(m K)
Hüllmaterial $\delta = 2$ mm, $\lambda_W = 20$ W/(m K)
Kühlmedium $t_a = 250$ ^{o}C, $\alpha = 2000$ W/(m^2 K)
volumenspezifische Leistung im Brennelement $\tilde{\dot{q}} = 1,2 \cdot 10^8$ W/m^3

Gesucht: Temperatur t_1 an der inneren Hüllenwand
Temperatur t_K im Kern des Brennelementes

Der erzeugte Wärmestrom im Brennelement ergibt sich mit der Wärmequelldichte $\tilde{\dot{q}}$

$$\dot{Q} = \tilde{\dot{q}}\ V = \tilde{\dot{q}}\ \frac{4}{3}\ \pi\ r_1^3$$

Der Wärmedurchgang von der Oberfläche des Brennelementes an das Kühlmedium liefert eine zweite Gleichung für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \frac{t_1 - t_a}{R_{\lambda,W} + R_\alpha} = \frac{t_1 - t_a}{\dfrac{1}{4\ \pi}\left(\dfrac{1}{\lambda_W}\ \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1 + \delta}\right) + \dfrac{1}{\alpha\,(r_1+\delta)^2}\right)}$$

Einsetzen und Umformen liefert die Temperatur an der inneren Hüllenwand

$$t_1 = t_a + \frac{\tilde{\dot{q}}\ r_1^3}{3}\left[\frac{1}{\lambda_W}\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+\delta}\right) + \frac{1}{\alpha\ (r_1+\delta)^2}\right]$$

$$t_1 = 250\ ^\circ\text{C} + \frac{1,2\cdot 10^8\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^3}\ 0,011^3\ \text{m}^3}{3}$$

$$\left[\frac{1}{20\ \dfrac{\text{W}}{\text{m K}}}\ \left(\frac{1}{0,011} - \frac{1}{0,013}\right)\ \frac{1}{\text{m}} + \frac{1}{2000\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}\ 0,013^2\ \text{m}^2}\right] = 444,7\ ^o\text{C}$$

Zur Ermittlung der Kerntemperatur muß das Temperaturprofil im Brennelement ausgehend von der Fourierschen Differentialgleichung berechnet werden.
Die Fouriersche Differentialgleichung für den eindimensionalen Fall und eine Kugel mit innerer Wärmequelle lautet:

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dt}{dr} + \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

Eine einfachere Lösung der Differentialgleichung (1) ist für die folgende Form möglich (Kontrolle durch Anwendung der Produktregel, um wieder auf Gl.(1) zu kommen).

$$\frac{1}{r^2}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\ \frac{dt}{dr}\right)+\frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\lambda}=0 \tag{2}$$

Trennung der Variablen und Integration

$$\int d\left(r^2\ \frac{dt}{dr}\right)=-\frac{\tilde{\dot{q}}}{\lambda}\ \int r^2\ dr$$

$$r^2\frac{dt}{dr}=-\frac{\tilde{\dot{q}}}{\lambda}\ \frac{r^3}{3}+C_1 \tag{3}$$

nochmalige Trennung der Variablen und Integration

$$\int dt=-\frac{\tilde{\dot{q}}}{3\ \lambda}\ \int r\ dr+C_1\int\ \frac{dr}{r^2}$$

$$t=-\frac{\tilde{\dot{q}}\ r^2}{6\ \lambda}-\frac{C_1}{r}+C_2 \tag{4}$$

Randbedingungen:

1. $r=0:\dfrac{dt}{dr}=0$ Aus Gl.(3) wird $C_1=0$

2. $r=r_1:t=t_1$ Aus Gl.(4) wird $C_2=t_1+\dfrac{\tilde{\dot{q}}\ r_1^2}{6\ \lambda}$.

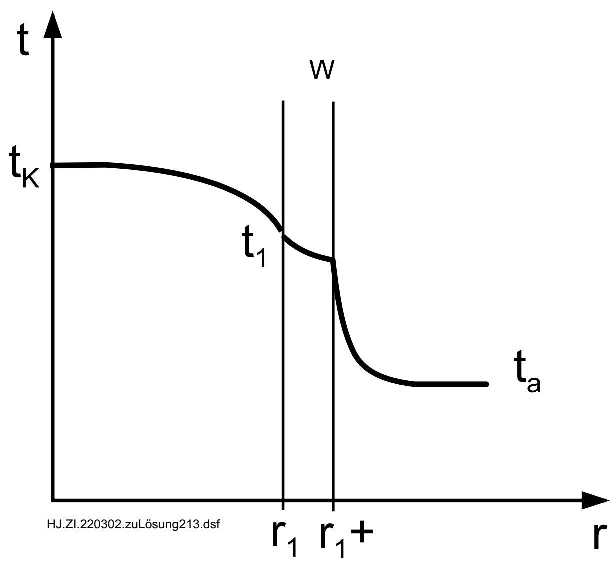
Damit lautet das Temperaturprofil

$$t(r)=t_1+\frac{\tilde{\dot{q}}}{6\ \lambda}\ \left(r_1^2-r^2\right)$$

Für die Kerntemperatur $t_K=t(r=0)$ ergibt sich

$$t_K=t_1+\frac{\tilde{\dot{q}}\ r_1^2}{6\ \lambda}=444,7\ ^o\mathrm{C}+\frac{1,2\cdot 10^8\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\cdot 0,011^2\ \mathrm{m}^2}{6\cdot 28\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}=531,1\ ^o\mathrm{C}$$

Temperaturverlauf im Brennelement



Gegeben: Dampfführende Rohrleitung mit wahlweise verschiedenen Isolierstärken
$D = 20$ mm, $L = 2$ m
$\delta_1/\delta_2/\delta_3 = 0{,}0025$ m/0,01 m/0,025 m
$\lambda_{Is} = 0{,}15$ W/(m K)
$t_i = 120$ °C, $t_a = 20$ °C, $\alpha_a = 7,5$ W/(m^2 K)
$R_{\alpha,i} = R_{\lambda,Rohr} = 0$

Gesucht: Aussage zur Zweckmäßigkeit der Isolierung

a) Unter den gegebenen Bedingungen ist der Wärmestrom an die Umgebung ($R_{\alpha,i} = R_{\lambda,Rohr} = 0$):

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_a}{R_k} = \frac{2\ \pi\ L\ (t_i - t_a)}{\dfrac{1}{\lambda_{Is}}\ \ln\dfrac{D + 2\ \delta_{Is}}{D} + \dfrac{2}{\alpha_a\ (D + 2\ \delta_{Is})}}. \tag{1}$$

Setzt man nacheinander die gegebenen Isolierschichtdicken einschließlich des nicht gegebenen Wertes $\delta_0 = 0$ ein, so folgt

δ_{Is}	0	0,0025	0,01	0,025	m
$\dot{Q}$	94,25	103,39	111,33	103,33	W

Die Werte zeigen, daß obige Funktion $\dot{Q}(\delta_{Is})$ ein Maximum aufweist. Die Ursache hierfür ist die geringer werdende Zunahme des ersten Summanden (Wärmeleitwiderstand) gegenüber der Abnahme des zweiten (Wärmeübergangswiderstand) im Nenner von Gleichung (1). Eine Isolierung mit dem vorhandenen Isoliermaterial ist nicht sinnvoll, da der Wärmestrom bei den gegebenen Isolierschichtdicken größer ist als ohne Isolierung. Dieser Effekt tritt immer dann auf, wenn das Isoliermaterial keine sehr guten Isoliereigenschaften aufweist, es sich um die Isolierung von Rohren mit kleinem Durchmesser handelt und der äußere Wärmeübergangskoeffizient klein ist.

b) Bei einer negativen Wirkung der Isolierung tritt immer ein Maximum von $\dot{Q}$ in Abhängigkeit von der Isolierschichtdicke δ_{Is} auf. Gl.(1) hat dann ein Maximum, wenn der Nenner F ein Minimum aufweist.

2.14/2

Der Ort des Extremwertes kann aus

$$\frac{d\dot{Q}}{d\delta_{Is}} = \frac{dF}{d\delta_{Is}} = 0$$

ermittelt werden. Mit

$$F = \frac{1}{\lambda_{Is}} \ln \frac{D + 2\ \delta_{Is}}{D} + \frac{2}{\alpha_a\ (D + 2\ \delta_{Is})}$$

wird

$$\frac{dF}{d\delta_{Is}} = \frac{2}{\lambda_{Is}\ (D + 2\ \delta_{Is})} - \frac{4}{\alpha_a\ (D + 2\ \delta_{Is})^2} = 0$$

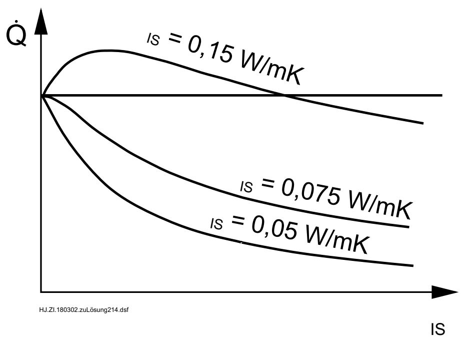
und daraus die Isolierschichtdicke δ_{EX} bei dem maximalen Wärmestrom

$$\delta_{EX} = \frac{\lambda_{IS}}{\alpha_a} - \frac{D}{2} = \frac{0,15\ \mathrm{W/(m\ K)}}{7,5\ \mathrm{W/(m^2\ K)}} - \frac{0,02\ \mathrm{m}}{2} = 0,01\ \mathrm{m}.$$

Bei weiterer Zunahme der Isolierschichtdicke nimmt $\dot{Q}$ ab. Der Wert $\dot{Q}_0 = 94,25$ W ohne Isolierung wird bei einer Isolierschichtdicke von $\delta_0 = 0,0392$ m erreicht (iterative Lösung aus Gl.(1)).
Damit gerade keine negative Wirkung der Isolierung auftritt, muß das Maximum von $\dot{Q}$ bei $\delta_{EX} = 0$ liegen. Damit ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeit des Isoliermaterials

$$\lambda_{Is,1} = \frac{D\ \alpha_a}{2} = \frac{0,02\ \mathrm{m} \cdot 7,5\ \mathrm{W/(m^2\ K)}}{2} = 0,075\ \mathrm{W/(m\ K)}.$$

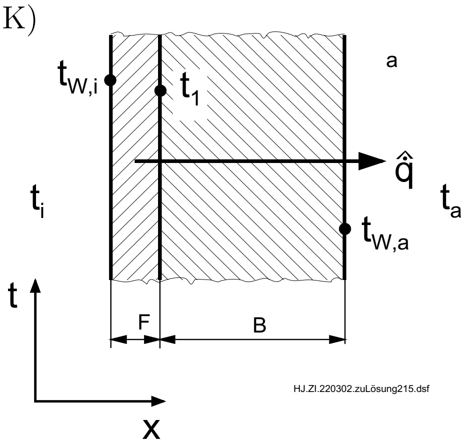
Das zu verwendende Isoliermaterial darf also höchstens diese Wärmeleitfähigkeit aufweisen, wenn keine negative Wirkung der Isolierung auftreten soll. Ebenso ergibt sich, daß bei der vorgegebenen Isolierung keine negative Wirkung auftritt, wenn der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_a \geq 15\ \mathrm{W/(m^2\ K)}$ bzw. der Rohrdurchmesser $D \geq 0,04$ m sind.



Lösung 2.15

Gegeben: Betonwand, innen mit einer Heizfolie versehen
$\delta_B = 100$ mm $\quad \delta_F = 0{,}5$ mm
$t_i = 20\ ^o$C $\quad t_a = -\ 3\ ^o$C
$\alpha_i = 8$ W/(m^2 K) $\quad \alpha_a = 15$ W/(m^2 K)
$\lambda_B = 1{,}4$ W/(m K) $\quad \lambda_F = 80$ W/(m K)

Gesucht: Notwendige Folienheizleistung



Auf der Wandinnenseite soll kein Wärmeverlust auftreten, d. h. von der Folie an den Raum wird kein Wärmestrom übertragen. Folgerung: $t_i = t_{W,i}$ und die Angabe von α_i ist überflüssig. Die gesamte Heizleistung der Folie erscheint als Wärmestrom nach außen.

Da die Folie sehr dünn und ihr Wärmeleitkoeffizient verhältnismäßig groß ist, kann mit guter Näherung der Wärmeleitwiderstand in der Folie vernachlässigt werden.

Man erhält mit $t_i = t_{W,i}$ für die Wärmestromdichte von der Folieninnenseite nach außen

$$\hat{q} = \frac{t_{W,i} - t_a}{\dfrac{\delta_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{\alpha_a}} = \frac{(20 - (-3))\ \mathrm{K}}{\dfrac{0,1\ \mathrm{m}}{1,4\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \dfrac{1}{15\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}}} = 166,552\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}. \tag{1}$$

Mit

$$\tilde{\dot{q}} = \frac{\dot{Q}}{V_F} = \frac{\dot{Q}}{A\ \delta_F} = \frac{\hat{\dot{q}}}{\delta_F} \tag{2}$$

folgt die volumenspezifische Heizleistung der Folie zu

$$\tilde{\dot{q}} = 333,1\ \mathrm{kW/m^3}\ .$$

Die exakte Berechnung erfordert zunächst die Bestimmung der Temperatur t_1 mit Hilfe der Differentialgleichung für das Temperaturfeld in der Folie

$$\lambda_F\ \frac{d^2t}{dx^2} + \tilde{\dot{q}} = 0$$

2.15/2

Die zweimalige Integration liefert

$$t = -\ \frac{\tilde{\dot{q}}}{2\ \lambda_F}\ x^2 + C_1\ x + C_2$$

Mit $C_1 = 0$ und $C_2 = t_i$ aus den Randbedingungen $(dt/dx)_{x=0} = 0$ und $t(x=0) = t_i$ folgt schließlich für die Temperatur $t_1 = t(x = \delta_F)$

$$t_1 = t_i - \frac{\tilde{\dot{q}}}{2\ \lambda_F}\ \delta_F^2$$

und weiter mit der Gleichung für den Wärmetransport durch die Betonwand

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_1 - t_a}{\dfrac{\delta_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{\alpha_a}} = \frac{t_i - \dfrac{\tilde{\dot{q}}}{2\ \lambda_F}\ \delta_F^2 - t_a}{\dfrac{\delta_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{\alpha_a}}$$

Mit Beachtung von Gl.(2), $\tilde{\dot{q}} = \hat{\dot{q}}/\delta_F$, folgt daraus nach Umformen

$$\hat{\dot{q}} = \frac{t_i - t_a}{\dfrac{\delta_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{\alpha_a} + \dfrac{\delta_F}{2\ \lambda_F}} = 166,548\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Der Unterschied zur Lösung nach Gl.(1) ist tatsächlich verschwindend gering.

Lösung 2.16

Gegeben: Mikroprozessor Breite $B = 10$ mm, Länge $L = 20$ mm, Leistung $\dot{Q} = 15$ W
Kühlkörper Dicke $\delta_K = 4$ mm, Temperatur $t_K = 60$ °C
Wärmeleitkoeffizient $\lambda_K = 200$ W/(m K)
Luftschicht Dicke $\delta_L = 0{,}01$ mm, Wärmeleitkoeffizient $\lambda_L = 0{,}0286$ W/(m K)
Wärmeleitpaste Dicke $\delta_P = 0{,}2$ mm, Wärmeleitkoeffizient $\lambda_P = 10$ W/(m K)

Gesucht: a) Temperatur $t_{W,a}$ an Kontaktfläche bei innigem Kontakt
b) Temperatur $t_{W,b}$ am Prozessor bei Luftschicht
c) Temperatur $t_{W,c}$ am Prozessor bei teilweisem Kontakt
d) Temperatur $t_{W,d}$ am Prozessor bei Wärmeleitpaste

a) Bei Annahme eines innigen Kontaktes zwischen Mikroprozessor und Kühlkörper tritt nur über dem Kühlkörper ein Temperaturabfall auf. An der Oberfläche des Mikroprozessors bzw. an der Kontaktfläche zwischen Mikroprozessor und Kühlkörper stellt sich bei der Annahme, dass die gesamte thermische Leistung des Mikroprozessors durch den Kühlkörper transportiert werden muss, die folgende Temperatur ein.

$$t_{W,a} = t_K + \frac{\dot{Q}}{B\ L}\ \frac{\delta_K}{\lambda_K} = 60\ °\mathrm{C} + \frac{15\ \mathrm{W} \cdot 0,004\ \mathrm{m}}{0,01 \cdot 0,02\ \mathrm{m}^2\ 200\ \mathrm{W/(m\ K)}} = 61,5\ °\mathrm{C}$$

b) Bei Annahme einer Luftschicht zwischen Mikroprozessor und Kühlkörper steigt die Temperatur an der Oberfläche des Prozessors sehr an, da die Luftschicht trotz der geringen Dicke einen großen Widerstand hat.

$$t_{W,b} = t_K + \frac{\dot{Q}}{B\ L}\ \left(\frac{\delta_K}{\lambda_K} + \frac{\delta_L}{\lambda_L}\right)$$

$$= 60\ °\mathrm{C} + \frac{15\ \mathrm{W}}{0,01 \cdot 0,02\ \mathrm{m}^2}\left(\frac{0,004\ \mathrm{m}}{200\ \mathrm{W/(m\ K)}} + \frac{1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}}{0,0286\ \mathrm{W/(m\ K)}}\right) = 87,72\ °\mathrm{C}$$

Die zulässige Temperatur von etwa 80 °C für die Oberflächentemperatur an einem Mikroprozessor wird nach diesem Modell überschritten.

c) Es wird angenommen, dass auf Grund der Oberflächenrauigkeit auf 10 % der Oberfläche ein direkter Kontakt zwischen Prozessor und Kühlkörper besteht und auf 90 % der Oberfläche eine Luftschicht vorliegt. Die Rauigkeitstiefe entspricht der Luftschichtdicke, so dass sich die Dicke des Kühlkörpers näherungsweise um + bzw. - 0,5 δ_L verändert. Für diesen Fall kann mit der Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen der gesamte Widerstand für die Anordnung ermittelt werden.

Widerstand der Luftschicht

$$R_1 = \frac{\delta_L}{\lambda_L \; 0,9 \; B \; L} = \frac{1 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{0,0286 \text{ W/(m K)} \; 0,9 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \text{ m}^2} = 1,9525 \; \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Widerstand des Kühlkörpers über der Luftschicht

$$R_2 = \frac{\delta_K - 0,5 \; \delta_L}{\lambda_K \; 0,9 \; B \; L} = \frac{0,004 \text{ m} - 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{200 \text{ W/(m K)} \; 0,9 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \text{ m}^2} = 0,11097 \; \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Widerstand des Kühlkörpers bei direktem Kontakt

$$R_3 = \frac{\delta_K + 0,5 \; \delta_L}{\lambda_K \; 0,1 \; B \; L} = \frac{0,004 \text{ m} + 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}}{200 \text{ W/(m K)} \; 0,1 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \text{ m}^2} = 1,00125 \; \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{(1,9425 + 0,11097) \text{ K/W}} + \frac{1}{1,00125 \text{ K/W}} \right)^{-1}$$

$$= 0,67307 \text{ K/W}$$

Temperatur an Oberfläche des Prozessors

$$t_{W,c} = t_K + \dot{Q} \; R_{ges} = 60 \; °C + 15 \text{ W} \cdot 0,67307 \; \frac{\text{K}}{\text{W}} = 70,1 \; °\text{C}$$

Bei dieser Rechnung wurde angenommen, dass im Kühlkörper keine Wärmeleitung in Querrichtung auftritt. Wenn die Kontaktflächen zwischen Kühlkörper und Prozessor einen geringen Abstand voneinander haben, sollte auch eine Wärmeleitung in Querrichtung berücksichtigt werden. Damit sinkt die Temperatur an der Oberfläche des Prozessors.

d) Bei Verwendung einer Wärmeleitpaste können Unebenheiten an den Oberflächen ausgeglichen werden, so dass ein guter Kontakt zwischen Prozessor und Kühlkörper besteht. Die Temperatur an der Oberfläche des Mikroporzessors berechnet sich zu

$$t_{W,d} = t_K + \frac{\dot{Q}}{B \; L} \left(\frac{\delta_K}{\lambda_K} + \frac{\delta_P}{\lambda_P} \right)$$

$$= 60 \; °C + \frac{15 \; W}{0,01 \cdot 0,02 \text{ m}^2} \left(\frac{0,004 \text{ m}}{200 \text{ W/(m K)}} + \frac{0,0002 \text{ m}}{10 \text{ W/(m K)}} \right) = 63,0 \; °C$$

Lösung 2.17

Gegeben: Flachdach mit Isolierung $\delta_{Is} = 16$ cm, $\lambda_{Is} = 0{,}046$ W/(m K)
Raumtemperatur $t_i = 20$ °C
Umgebungstemperatur $t_a = -\,15$ °C
Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_i = 5$ W/(m^2 K), $\alpha_\mathrm{a} = 20$ W/(m^2 K)
Schneeschicht $\delta_S = 20$ cm, $\lambda_S = 0,12$ W/(m K)

Gesucht: a)Wärmestromdichte durch Dach ohne Schneeschicht
b) Wärmestromdichte durch Dach mit Schneeschicht
c) Dicke der Schneeschicht bei Beginn des Schmelzens

a) Widerstand für isoliertes Flachdach

$$R_{k,a} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_{Is}}{\lambda_{Is}} + \frac{1}{\alpha_a}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{5\ \mathrm{W/(m^2\ K)}} + \frac{0,16\ \mathrm{m}}{0,046\ \mathrm{W/(m\ K)}} + \frac{1}{20\ \mathrm{W/(m^2\ K)}}\right)$$

$$= 3,728\ \frac{1}{A}\ \frac{\mathrm{K\ m^2}}{\mathrm{W}}$$

Wärmestromdichte durch Dach

$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{t_i - t_a}{A\ R_{k,a}} = \frac{(20-(-15))\ \mathrm{K}}{3,728\ \dfrac{\mathrm{K\ m^2}}{\mathrm{W}}} = 9,388\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

b) Widerstand für Flachdach mit Schnee

$$R_{k,b} = R_{k,a} + \frac{\delta_S}{\lambda_S\ A} = \frac{1}{A}\left(3,728 + \frac{0,2}{0,12}\right)\frac{\mathrm{K\ m^2}}{\mathrm{W}} = 5,395\ \frac{1}{\mathrm{A}}\ \frac{\mathrm{K\ m^2}}{\mathrm{W}}$$

Wärmestromdichte durch Dach

$$\dot{q}_S = \frac{t_i - t_a}{A\ R_{k,b}} = \frac{(20-(-15))\ \mathrm{K}}{5,395\ \dfrac{\mathrm{K\ m^2}}{\mathrm{W}}} = 6,488\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

Da lockerer Schnee eine gute Isolierwirkung hat, sinkt die Wärmestromdichte merklich ab.

c) Der Schnee auf dem Dach beginnt zu schmelzen, wenn die Temperatur auf der Oberfläche des Daches $t_0 = 0$ °C beträgt. Für diesen Fall ist die Wärmestromdichte durch das Dach

$$\dot{q}_C = \frac{t_i - t_0}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{\delta_{Is}}{\lambda_{Is}}} = \frac{(20-0)\ \mathrm{K}}{\dfrac{1}{5\ \mathrm{W/(m^2\ K)}} + \dfrac{0,16\ \mathrm{m}}{0,046\ \mathrm{W/(m\ K)}}} = 5,437\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

2.17/2

Für den Wärmetransport von der Dachoberfläche an die Umgebung gilt

$$\dot{\hat{q}}_C = \frac{t_0 - t_a}{\dfrac{\delta_S^*}{\lambda_S} + \dfrac{1}{\alpha_a}}$$

und daraus ergibt sich die notwendige Schneedicke

$$\delta_S^* = \left(\frac{t_0 - t_a}{\dot{\hat{q}}_c} - \frac{1}{\alpha_a} \right) \lambda_S$$

$$= \left(\frac{(0 - (-15))\ \mathrm{K}}{5,437\ \mathrm{W/m^2}} - \frac{1}{20\ \mathrm{W/(m^2\ K)}} \right) 0,12\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} = 0,325\ \mathrm{m}.$$

Eine größere Schneedicke von lockerem Schnee ist im vorliegenden Fall nicht möglich. Wenn das Dach schlechter isoliert ist, verringert sich diese maximale Schneedicke.Wenn die Schneedecke fester wird, erhöht sich der Wärmeleitkoeffizient für den Schnee und es ist eine größere Schneedecke möglich. Ebenso kann die Schneedecke bei tieferen Außentemperaturen zunehmen.

Lösung 2.20

Gegeben: Rohr $d = 200$ mm, $\lambda_{Is} = 0{,}06$ W/(m K), $\delta_{Is} = 250$ mm
Luftstrom $w = 3$ m/s, $t_L = 400$ °C, $\varrho_L = 0,517$ kg/m^3
$c_{pL} = 1,069$ kJ/(kg K)
Heizung $P_{el}/L = 100$ W/m
Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_i = 8$ W/(m^2 K), $\alpha_\mathrm{a} = 6$ W/(m^2 K)
Umgebung $t_a = 20$ °C

Gesucht: Rohrwandtemperatur t_W
Temperaturänderung der Luft Δt_L

Die Energiebilanz für die beschriebene Anordnung lautet wenn angenommen wird, dass die Wandtemperatur über der Lufttemperatur liegt

$$P_{el} = \dot{Q}_i + \dot{Q}_a$$

Der Wärmestrom von der Rohrwand an den Luftstrom berechnet sich zu

$$\dot{Q}_i = \alpha_i \; \pi \; d \; L \; (t_W - t_L)$$

und der Wärmestrom von der Rohrwand an die Umgebung

$$\dot{Q}_a = k \; \pi \; d \; L \; (t_W - t_a)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten k (bezogen auf die Rohroberfläche)

$$k = \left[\frac{d}{\alpha_a (d + 2\;\delta_{Is})} + \frac{d}{2\;\lambda_{Is}} \ln\frac{d + 2\;\delta_{Is}}{d}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{0,2\text{ m}}{6\;\dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ K}}\;0,7\text{ m}} + \frac{0,2\text{ m}}{2\;\cdot 0,06\;\dfrac{\text{W}}{\text{m K}}} \ln\frac{0,7\text{ m}}{0,2\text{ m}}\right]^{-1} = 0,4683\;\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ K}}$$

Nach Einsetzen und Umstellen nach der sich einstellenden Rohrwandtemperatur ergibt sich

$$t_W = \frac{P_{el}/L \cdot \dfrac{1}{\pi\;d} + \alpha_i\;t_L + k\;t_a}{\alpha_i + k}$$

$$t_W = \frac{100\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}\ \dfrac{1}{\pi\ 0,2\ \mathrm{m}} + 8\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 400\ {}^\circ\mathrm{C} + 0,4683\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 20\ {}^\circ\mathrm{C}}{8\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}} + 0,4683\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}} = 397,78\ {}^\circ\mathrm{C}$$

Da die Wandtemperatur t_W kleiner als die Lufttemperatur t_L ist, erfolgt eine Abkühlung des Luftstroms. Die Temperaturänderung des Luftstroms berechnet sich mit der Energiebilanz für den Luftstrom

$$\dot{Q}_i = \dot{m}_L\ c_{pL}\ \Delta t_L$$

Der übertragene Wärmestrom $\dot{Q}_i$ beträgt für eine Rohrlänge von $L = 1$ m

$$\dot{Q}_i = \alpha_i\ \pi\ d\ L(t_W - t_L)$$

$$= 8\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ \pi\ 0,2\ \mathrm{m}\ 1\ \mathrm{m}(397,78 - 400)\ \mathrm{K} = -11,15\ \mathrm{W}$$

Der Luftmassestrom berechnet sich aus der Kontinuitätsgleichung zu

$$\dot{m}_L = \varrho_L\ \frac{\pi}{4}\ d^2\ w = 0,517\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\ \frac{\pi}{4}\ 0,2^2\ \mathrm{m^2}\ 0,3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0,04873\ \mathrm{kg/s}$$

Die Luft im Rohr kühlt sich pro m im Rohr um

$$\Delta t_L = \frac{\dot{Q}_i}{\dot{m}_L\ c_{pL}} = \frac{-11,15\ W}{0,04873\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\ 1069\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}} = -0,214\ \mathrm{K}$$

ab. Da die Temperaturänderung der Luft sehr gering ist, dient die beschriebene Anordnung dem Ziel, die Lufttemperatur im Rohr konstant zu halten.

Lösung 2.21

Gegeben: Platte mit Rippen
$t_W = 100\ ^o$C, $t_U = 20\ ^o$C, $\alpha = 10$ W/(m^2 K),
$\lambda = 20$ W/(m K), $L = 0{,}15$ m

Rundstab $d = 45$ mm
Rechteckstab $a = 40$ mm

Gesucht: t_m, η_R, $\dot{Q}$ und t_L

Die Differentialgleichungen für den Rundstab und den Rechteckstab lassen sich auf die Dgl. für eine gerade Rippe zurückführen:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\ \theta = 0 \tag{1}$$

$\theta = t - t_U$ Übertemperatur der Rippe

$$m = \sqrt{\frac{2\ \alpha}{\lambda\ \delta_R}} = \sqrt{\frac{\alpha\ U}{\lambda\ A^*}}$$ Rippengröße

U und A Umfang und Querschnittsfläche der Rippe.

Die allgemeine Lösung der Dgl.(1) ist bekanntlich

$$\theta = C_1\ \mathrm{e}^{mx} + C_2\ \mathrm{e}^{-mx}.$$

Mit den beiden Randbedingungen

$$\theta(x=0) = t_W - t_U = \theta_a$$

$$-\lambda\ \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} = 0$$

lassen sich die Integrationskonstanten berechnen:

$$C_1 = \theta_a\ \frac{\mathrm{e}^{-m\ L}}{\mathrm{e}^{m\ L} + \mathrm{e}^{-m\ L}};\qquad C_2 = \theta_a\ \frac{\mathrm{e}^{m\ L}}{\mathrm{e}^{m\ L} + \mathrm{e}^{-m\ L}}$$

Die Temperaturverteilung entlang der Rippe ist damit

$$\theta(x) = \theta_a \, \frac{\mathrm{e}^{m(L-x)} + \mathrm{e}^{-m(L-x)}}{\mathrm{e}^{m\,L} + \mathrm{e}^{-m\,L}} = \theta_a \, \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(m\,L)} \;. \tag{2}$$

Dieses Ergebnis kann auch aus dem Skript S.32 bzw. Umdruck S.15 entnommen werden (mit L für H)

Die mittlere Temperatur in der Rippe folgt aus

$$\theta_m = \frac{1}{L} \int_0^L \theta(x) dx \qquad \text{mit} \qquad \theta(x) \text{ nach Gl.(2).}$$

Man erhält

$$\theta_m = \frac{\theta_a}{L \cosh(m\,L)} \, \frac{\sinh(m\,L)}{m}$$

$$\theta_m = \frac{\theta_a}{m\,L} \tanh(m\,L) \equiv \; t_m - t_U \;. \tag{3}$$

Mit Gl.(3) ergibt sich für den Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{t_m - t_U}{t_W - t_U} = \frac{\theta_m}{\theta_a} = \frac{1}{m\,L} \tanh(m\,L) \;.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man

	U/m	A/m^2	m/m^{-1}	t_m/^{o}C	η_R
Rundstab	0,141	0,00159	6,667	80,93	0,761
Rechteckstab	0,160	0,0016	7,071	79,3	0,741

Rundstab $U = \pi\ d$, $A^* = \pi/4\ d^2$
Rechteckstab $U = 4\ a,\ A^* = a^2$

Der pro Stab abgegebene Wärmestrom berechnet sich für den Rundstab zu

$$\dot{Q} = \alpha\ \pi\ d\ L\ (t_m - t_U) = 10\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}\ \pi\ 0,045\ \mathrm{m}\ 0,15\ \mathrm{m}\ (80,93 - 20)\mathrm{K} = 12,92\ \mathrm{W}$$

und für den Rechteckstab zu

$$\dot{Q} = \alpha\ 4\ a\ L\ (t_m - t_U) = 10\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}\ 4 \cdot 0,04\ \mathrm{m}\ 0,15\ \mathrm{m}(79,3 - 20)\mathrm{K} = 14,23\ \mathrm{W}.$$

Bei dieser Berechnung wurde von der gesamten Rippenfläche und der mittleren Rippentemperatur ausgegangen. Der Wärmestrom kann auch mit dem Ansatz für den Rippenfuß

$$\dot{Q} = \alpha^* \; A_{RF} \; \theta_a$$

mit dem scheinbaren Wärmeübergangskoeffizienten am Rippenfuß für eine ebene Rippe

$$\alpha^* = \lambda \; m \; \tanh(m \; L)$$

berechnet werden. Z. B. für den Rundstab wird

$$\dot{Q} = \lambda \; m \; \tanh(m \; L) \; \frac{\pi}{4} \; d^2 \; (t_W - t_U)$$

$$= 20 \; \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \; K}} \; 6,667 \; \frac{1}{\mathrm{m}} \; \tanh(6,667 \cdot 0,15) \; \frac{\pi}{4} \; 0,045^2 \; \mathrm{m}^2 \; (100 - 20) \; \mathrm{K} = 12,92 \; \mathrm{W}.$$

Lösung 2.23

Gegeben: Temperaturmeßfühler im Schutzrohr
$d_a = 10$ mm, $d_i = 6$ mm, $\lambda = 50$ W/(m K),
$\alpha = 50$ W/(m^2 K)
$t_W = 80$ ^{o}C, $t_a = 120$ ^{o}C
Meßfehler $\theta_L = t_L - t_a = -2$ K

Gesucht: a) eine allgemeine Beziehung für die Schutzrohrlänge
b) die konkrete Schutzrohrlänge L im vorliegenden Fall

a) Der Temperaturverlauf entlang des Schutzrohres ergibt sich mit der Beziehung für die ebene Rippe (siehe Skript S.32 Gl.(2.57) oder Umdruck S.15) zu

$$\theta = \theta_a \; \frac{\cosh[m\;(L-x)]}{\cosh(m\;L)}$$

mit

$\theta = t - t_a$	Übertemperatur der Rippe (Schutzrohr) gegenüber dem Fluid
$\theta_a = t_W - t_a$	Übertemperatur am Rippenfuß (Schutzrohrfuß) gegenüber dem Fluid

$$m = \sqrt{\frac{\alpha\;U}{\lambda\;A^*}} = 2\;\sqrt{\frac{\alpha\;d_a}{(d_a^2 - d_i^2)\;\lambda}}$$ modifizierte Rippengröße (Schutzrohrgröße)

$$U = \pi\;d_a, \quad A^* = \frac{\pi}{4}\left(d_a^2 - d_i^2\right)$$

Mit $x = L$ ergibt sich für die Übertemperatur am Ende des Schutzrohres

$$\theta_L = \theta_a\;\frac{1}{\cosh(m\;L)}.$$

Daraus folgt die Länge L des Schutzrohres

$$L = \frac{1}{2}\;\sqrt{\frac{(d_a^2 - d_i^2)\;\lambda}{d_a\;\alpha}}\;\text{arcosh}\;\frac{\theta_a}{\theta_L}$$

b) Die gegebenen Zahlenwerte liefern für L:

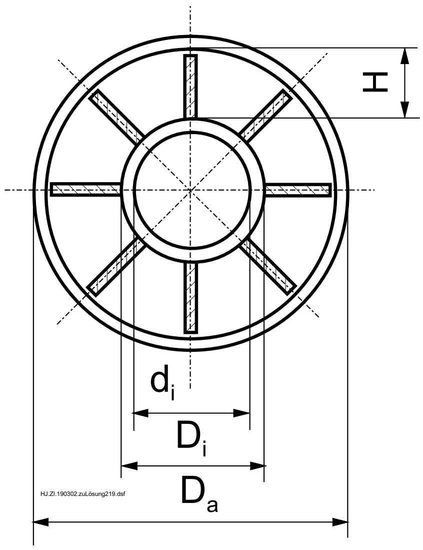
$$L = \frac{1}{2}\;\sqrt{\frac{(0,01^2 - 0,006^2)\;\text{m}^2\;50\;\dfrac{\text{W}}{\text{m K}}}{0,01\;\text{m}\;50\;\dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\;\text{K}}}}\;\text{arcosh}\;\left(\frac{-40}{-2}\right) = 0,147\;\text{m}\;.$$

Lösung 2.24

Gegeben: Doppelrohr-Wärmeübertrager
Innenrohr: Wasser
$d_i = 20$ mm, $\quad \alpha_i = 5800$ W/(m^2 K)
Ringraum: Luft
$D_i = 25$ mm, $\quad D_a = 60$ mm, $\quad \alpha_a = 270$ W/(m^2 K)
$\dot{m}_L = 0{,}15$ kg/s, $\Delta t_L = 80$ K, $\quad t_L - t_W = 60$ K
$c_{pL} = 1$ kJ/(kg K)
Rippen: $H = 15$ mm, $\delta_R = 1$ mm, $\lambda_{St} = 50$ W/(m K), 8 Stück

Gesucht: Länge L des Wärmeübertragers

Der im Apparat zu übertragende Wärmestrom ergibt sich aus der Energiebilanz für die Luft zu



$$\dot{Q} = \dot{m}_L\ c_{pL}\ \Delta t_L \tag{1}$$

$$\dot{Q} = 0,15\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}\ 1\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\ 80\ \text{K} = 12\ \text{kW}.$$

Die dazu notwendige Fläche bzw. Rohrlänge berechnet man mit der Gleichung für den Wärmedurchgang

$$\dot{Q} = \frac{t_L - t_W}{R_k} \tag{2}$$

und dem Wärmedurchgangswiderstand

$$R_K = \frac{1}{\pi\ L}\left(\frac{1}{\alpha_i\ d_i} + \frac{1}{2\ \lambda_{St}}\ \ln\frac{D_i}{d_i} + \frac{1}{\bar{\alpha}_a\ D_i}\right). \tag{3}$$

Für den äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$ auf der Luftseite gilt nach Umdruck S.15

$$\bar{\alpha} = \alpha_a\ \frac{A_U}{A} + \alpha^*\ \frac{A_{RF}}{A}$$

mit dem scheinbaren Wärmeübergangskoeffizienten α^* am Rippenfuß für eine ebene Rippe

$$\alpha^* = \lambda_{St}\ m\ \tanh(m\ H)$$

mit der Rippengröße

$$m = \sqrt{\frac{2\ \alpha_a}{\lambda_{St}\ \delta_R}}.$$

Mit der Fläche des Rippenfußes $A_{RF} = 8\ \delta_R\ L$, der unberippten Fläche $A_U = \pi\ D_i\ L - 8\ \delta_R\ L$ und der unberippt gedachten Fläche $A = \pi\ D_i\ L$ wird

$$\bar{\alpha}_a = \alpha_a\ \frac{\pi\ D_i - 8\ \delta_R}{\pi\ D_i} + \alpha^* \frac{8\ \delta_R}{\pi\ D_i}.$$

Die gegebenen Zahlenwerte liefern

$m =$	103,92	m^{-1}
$\alpha^* =$	4755,5	$\mathrm{W/(m^2\ K)}$
$\bar{\alpha}_a =$	726,9	$\mathrm{W/(m^2\ K)}$

und mit den Gleichungen (1), (2) und (3) wird die gesuchte Länge

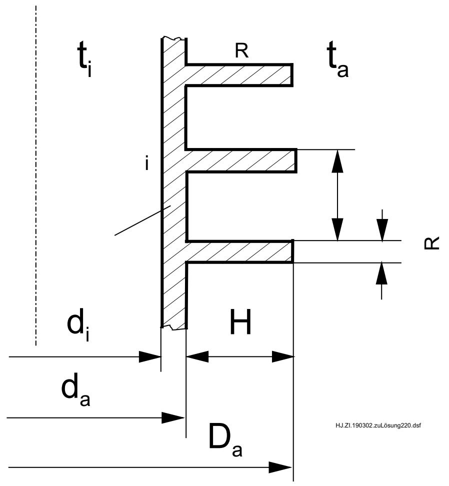
$$L = \frac{\dot{Q}}{\pi\ (t_L - t_W)}\ \left(\frac{1}{\alpha_i\ d_i} + \frac{1}{2\ \lambda_{St}}\ \ln\frac{D_i}{d_i} + \frac{1}{\bar{\alpha}_a\ D_i}\right)$$

$$L = \frac{12000\ \mathrm{W}}{\pi\ 60\ \mathrm{K}}\ \left(\frac{1}{5800\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 0,02\ \mathrm{m}} + \frac{\ln\frac{0,025\ \mathrm{m}}{0,02\ \mathrm{m}}}{2\cdot 50 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}} + \frac{1}{726,9\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}\ 0,025\ \mathrm{m}}\right)$$

$$\underline{L = 4,19\ \mathrm{m}.}$$

Lösung 2.25

Gegeben: Rippenrohr
$D_a = 29$ mm
$d_a = 16$ mm
$d_i = 14$ mm
$\delta_R = 0{,}6$ mm
$\delta = 3{,}2$ mm
$\alpha_i = 650$ W/(m^2 K)
$\alpha_R = 20$ W/(m^2 K)
$\lambda_{Al} = 200$ W/(m K)
$\lambda_{St} = 50$ W/(m K)
$t_i - t_a = 20$ K



Gesucht: $\dot{Q}/L$ für
a) Aluminium
b) Stahl als Rohrwand- und Rippenwerkstoff

Die Berechnung erfolgt über den scheinbaren Wärmeübergangskoeffizienten α^* am Rippenfuß. Nach Umdruck S.16 gilt für den vorliegenden Fall einer Kreisrippe näherungsweise

$$\alpha^* = \lambda\ m\ \tanh\left[m\ H\left(1 + 0,35\ \ln\ \frac{D_a}{d_a}\right)\right]\ \frac{\dfrac{D_a}{d_a} + 1}{2\ \left(1 + 0,35\ \ln\ \dfrac{D_a}{d_a}\right)}. \tag{1}$$

Die Rippengröße m und die Rippenhöhe H folgen aus

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_R\ U}{\lambda\ A^*}} = \sqrt{\frac{2\ \alpha_R}{\lambda\ \delta_R}}$$

$$H = \frac{1}{2}\ (D_a - d_a).$$

Für das Verhältnis U/A^* (wärmeabgebender Umfang/wärmeleitender Querschnitt) gilt an jeder Stelle der Kreisrippe mit dem variablen Durchmesser d

$$\frac{U}{A^*} = \frac{2\ \pi\ d}{\pi\ d\ \delta_R} = \frac{2}{\delta_R}$$

Der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient auf der Rohraußenseite ergibt sich nach Umdruck S.15 im vorliegenden Fall zu

$$\bar{\alpha}_a = \alpha_R\ \frac{A_U}{A} + \alpha^*\ \frac{A_{RF}}{A} = \alpha_R\ \left(1 - \frac{\delta_R}{\delta}\right) + \alpha^*\ \frac{\delta_R}{\delta}.$$

Daraus folgt für den Wärmedurchgangswiderstand

$$R_k = \frac{1}{\pi\ L} \left(\frac{1}{\alpha_i\ d_i} + \frac{1}{2\ \lambda} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{1}{\bar{\alpha}_a\ d_a} \right)$$

und für den längenbezogenen Wärmestrom

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{t_i - t_a}{R_k\ L}.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man

	$\frac{H}{\text{mm}}$	$\frac{m}{\text{m}^{-1}}$	$\frac{\alpha^*}{\text{W/(m}^2\ \text{K)}}$	$\frac{\bar{\alpha}}{\text{W/(m}^2\ \text{K)}}$	$\frac{R_k}{\text{K/W}}$	$\frac{\dot{Q}/L}{\text{W/m}}$
Aluminium	6,5	18,257	605,2	129,7	0,1884	106,1
Stahl	6,5	36,615	593,21	127,5	0,1915	104,5

Wärmetechnisch spielt die Wahl des Werkstoffes in diesem Beispiel praktisch keine Rolle, da der Wärmeleitwiderstand am gesamten Wärmetransportwiderstand nur einen kleinen Anteil hat. Das kommt auch durch den hohen Rippenwirkungsgrad bzw. den geringen Temperaturabfall über der Rippenhöhe zum Ausdruck.

Anmerkung:
Die Bedingung für die Anwendung der Gleichung (1) mit $m\ r_a > 0,5$ ist nicht gegeben (beim Aluminium $m\ r_a = 0,146$, bei Stahl $m\ r_a = 0,293$). Jedoch kann diese Gl. auch angewendet werden, wenn $\eta_R > 0,5$ ist. Wegen $\eta_R = 0,993$ für Aluminum bzw. $\eta_R = 0,973$ für Stahl, berechnet nach der Gl.

$$\eta_R = \frac{\tanh \left(m\ H\ (1 + 0,35) \ln \frac{D_a}{d_a} \right)}{m\ H\ (1 + 0,35 \ln \frac{D_a}{d_a}}$$

ist eine Anwendung zulässig.

Lösung 2.26

Gegeben: Wärmerohr, außen (Luftseite) mit stumpfen Nadelrippen bestückt.

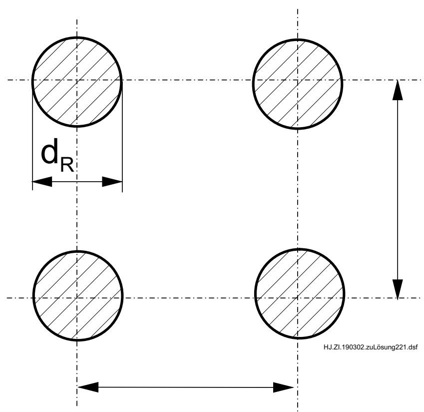
$t_a = 35\ ^o\text{C}$ $\qquad$ $t_i = 70\ ^o\text{C}$
$\alpha_R = 50\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}$ $\qquad$ $\lambda = 370\ \text{W/(m K)}$
$\hat{\dot{q}}_a = 6000\ \text{W/m}^2$ $\qquad$ $R_{\alpha,i} = R_\lambda = 0$

Nadelrippe: $H = 40$ mm, $\quad d_R = 3$ mm

Gesucht: a) $\hat{\dot{q}}$ für das unberippte Rohr
b) Abstand δ der Nadelrippen bei außen beripptem Rohr

a) Für das unberippte Rohr ergibt sich der auf die Außenfläche bezogene Wärmestrom, wenn nur der äußere Wärmeübergangswiderstand berücksichtigt wird, zu
$\hat{\dot{q}}_a = \alpha_R\ (t_i - t_a) = 50\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}\ (70 - 35)\ \text{K} = 1750\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2}.$

b) Da über den Rohrdurchmesser keine Aussage vorliegt, wird die Rohroberfläche abgewickelt und als eben betrachtet.



Mit der Rippengröße

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_R\ U}{\lambda\ A^*}};$$

und dem Umfang und der Querschnittsfläche der Rippen

$$U = \pi\ d_R; \qquad A^* = \frac{\pi}{4}\ d_R^2$$

folgt

$$m = \sqrt{\frac{4\ \alpha_R}{\lambda\ d_R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}}{370\ \text{W/(m K)}\ 0,003\ \text{m}}} = 13,423\ \frac{1}{\text{m}}.$$

Die Wärmestromdichte für das betrachtete Flächenelement $A_a = \delta^2$ mit Rippenbesatz berechnet sich aus

$$\hat{\dot{q}}_a = \frac{\dot{Q}}{A_a} = \frac{t_i - t_a}{A_a\ R_k}. \tag{1}$$

Wegen $R_{\alpha,i} = R_\lambda = 0$ reduziert sich der Wärmedurchgangswiderstand auf

$$R_k = R_{\alpha_a} = \frac{1}{\bar{\alpha}_a\ A_a} \tag{2}$$

mit dem äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}_a$ auf der berippten Außenseite

$$\bar{\alpha}_a = \alpha_R\ \frac{A_U}{A_a} + \alpha^*\ \frac{A_{RF}}{A_a} \tag{3}$$

$A_a = \delta^2$	Fläche ohne Rippen
$A_{RF} = \frac{\pi}{4}\ d_R^2$	Fläche des Rippenfußes
$A_U = A_a - A_{RF}$	rippenfreie Fläche innerhalb A_a

Der scheinbare Wärmeübergangskoeffizient am Rippenfuß für eine Nadelrippe berechnet sich nach dem Umdruck S.16 aus

$$\alpha^* = \lambda\ m\ \tanh(m\ H)$$

$$= 370\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ 13,423\ \frac{1}{\mathrm{m}}\ \tanh(13,423 \cdot 0,04) = 2436,8\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}.$$

Aus (3) folgt für die Größe des Flächenelementes

$$A_a = A_{RF}\ \frac{\alpha^* - \alpha_R}{\bar{\alpha}_a - \alpha_R} = \delta^2 \tag{4}$$

und mit (1) und (2) ergibt sich für den äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten

$$\bar{\alpha}_a = \frac{\hat{\dot{q}}}{t_i - t_a}. \tag{5}$$

Damit folgt aus (4) und (5) für den Abstand der Rippen

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi}{4}\ d_R^2\ \frac{\alpha^* - \alpha_R}{\dfrac{\hat{\dot{q}}}{t_i - t_a} - \alpha_R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4}\ 0,003^2\ \mathrm{m^2}\ \ \frac{(2436,8 - 50)\ \mathrm{W/(m^2\ K)}}{\dfrac{6000\ \mathrm{W/m^2}}{(70 - 35)\ \mathrm{K}} - 50\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}}} = 0,01179\ \mathrm{m}\ .$$