Lösung 4.1

Gegeben: Rechteckkanal, von Diphyl durchströmt
$w = 0{,}2$ m/s, $t_i = 400$ ^{o}C

Stoffdaten von Diphyl: $\lambda = 0{,}083$ W/(m K),
$c_p = 2{,}57$ kJ/(kg K), $\eta = 1,405 \cdot 10^{-4}$ Pa s,
$\varrho = 717$ kg/m^3

Modellkanal im Maßstab 1:2 verkleinert und von Wasser durchströmt

Gesucht: a) Bedingungen für Ähnlichkeit von Original- und Modellversuchen
b) Zusammenhang zwischen α_i und $\alpha_{i,M}$

a) Original- und Modellvorgang sind einander dann ähnlich, wenn die dimensionslosen Kenngrößen, die den Vorgang bestimmen, übereinstimmen. Bei erzwungener Konvektion sind dies Re, Pr und Nu.

- Re-Gleichheit

$$Re_O = Re_M \;\Leftrightarrow\; \frac{w_O\ d_{gl,O}}{\nu_O} = \frac{w_M\ d_{gl,M}}{\nu_M}$$

Mit

$$d_{gl,M} = 0,5\ d_{gl,O} \text{ und } w_O = w$$

folgt

$$w_M = w\ \frac{d_{gl,O}}{d_{gl,M}}\ \frac{\nu_M}{\nu_O} = \ 2\ \frac{\nu_M}{\nu_O}\ w \tag{1}$$

- Pr-Gleichheit

$$Pr_O = Pr_M \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{\eta\ c_P}{\lambda}\right)_O = \left(\frac{\eta\ c_p}{\lambda}\right)_M$$

$$Pr_M = \left(\frac{\eta\ c_p}{\lambda}\right)_O = \frac{1,405 \cdot 10^{-4}\ \text{Pa s} \cdot 2,57\ \dfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}}}{0,083\ \dfrac{\text{W}}{\text{m K}}} = 4,35$$

Aus der Stoffdatentabelle für Wasser (Umdruck S.46) folgt

$Pr = 4,35$ bei $t_M = 40\ ^o\mathrm{C}$

Die Modellversuche sind bei einer mittleren Wassertemperatur $t_M = 40\ ^o\mathrm{C}$ auszuführen.

- Strömungsgeschwindigkeit im Modellversuch
  Stoffdaten von Wasser bei $t_M = 40\ ^o\mathrm{C}$ (Umdruck S.46):

$$\nu_M = 0,658 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \qquad \lambda_M = 0,629\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}$$

Aus (1) ergibt sich mit $\nu_O = \eta/\varrho$

$$w_M = 2\ \varrho\ \frac{\nu_M}{\eta}\ w = \frac{2 \cdot 717\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,658\ \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \cdot 0,2\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1,405 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa\ s}}\ \frac{1\ \mathrm{Pa}}{1\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\ s}^2}}$$

$$w_M = 1,343\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Aus der Gleichheit der Nu-Zahlen $Nu_O = Nu_M$ folgt

$$\frac{\alpha_O\ d_{gl,O}}{\lambda_O} = \frac{\alpha_M\ d_{gl,M}}{\lambda_M}$$

Für Diphyl beträgt damit der Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_O = \alpha_i = \frac{d_{gl,M}}{d_{gl,O}}\ \frac{\lambda}{\lambda_M}\ \alpha_{i,M} = \frac{\lambda}{2\ \lambda_M}\ \alpha_{i,M}$$

$$\alpha_i = \frac{0,083\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{2 \cdot 0,629\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}\ \alpha_{i,M} = 0,0660\ \alpha_{i,M},$$

d. h. 6,6 % des im Modellversuch mit Wasser ermittelten Wertes $\alpha_{i,M}$.

Lösung 4.2

Gegeben: Senkrechte Wand $H = 0{,}1$ m, $B = 1$ m, $t_W = 60\ ^o$C
Fluid (Luft, Wasser, Öl) mit $t_F = 20\ ^o$C

Öl: $\lambda = 0{,}122$ W/(m K), $\nu = 8,7 \cdot 10^{-6}$ m^2/s,
$\beta = 0,7 \cdot 10^{-3} K^{-1}$, $Pr = 126$

Gesucht: $\dot{Q}$ infolge Konvektion für
a) Luft b) Wasser c) Öl

Übertragener Wärmestrom bei Konvektion

$$\dot{Q} = \alpha\ A\ (t_W - t_F) = \alpha\ B\ H\ (t_W - t_F)$$

Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvektion

charakteristische Abmessung $l = H$
Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = 0,5\ (t_W + t_F) = 40\ ^o$C

Stoffwerte bei t_B (Umdruck S.45 und 46 bzw. Aufgabenstellung)

		Luft	Wasser	Öl
λ	W m^{-1} K^{-1}	0,02716	0,629	0,122
β	10^{-3} K^{-1}	3,200	0,3890	0,7
ν	10^{-6} m^2 s^{-1}	17,26	0,658	8,7
Pr		0,7122	4,34	126
Pr_W		-	3,00	-

Wärmeübergangskoeffizient (Umdruck S.38)

$$\alpha = \frac{\lambda}{H}\ Nu = \frac{\lambda}{H}\ (0,11\ Ra^{1/3} + Ra^{0,1})\ K_T$$

Rayleigh-Zahl

$$Ra = g\ H^3\ (t_W - t_F)\ \frac{\beta\ Pr}{\nu^2}$$

Korrekturfaktor für temperaturabhängige Stoffwerte

$$K_T = \begin{cases} 1 & \text{fuer Luft} \\ (Pr/Pr_W)^{0,25} & \text{fuer Fluessigkeiten} \end{cases}$$

Ergebnisse

a) Luft

$$\frac{\beta\ Pr}{\nu^2} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}\ 0,7122}{17,26^2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}^4\ \mathrm{s}^{-2}} = 7,65016 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4\ \mathrm{K}}$$

$$Ra = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0,1^3\ \mathrm{m}^3\ 40\ \mathrm{K} \cdot 7,65016 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4\ \mathrm{K}} = 3,00192 \cdot 10^6$$

$$K_T = 1$$

$$Nu = 0,11\ Ra^{1/3} + Ra^{0,1} = 20,3118$$

$$\alpha = \frac{0,02716\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0,1\ \mathrm{m}} \cdot 20,3118 = 5,52\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}$$

$$\dot{Q} = 5,52\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}} \cdot 1 \cdot 0,1\ \mathrm{m}^2 \cdot 40\ \mathrm{K} = 22,1\ \mathrm{W}$$

b) Wasser

$$\frac{\beta\ Pr}{\nu^2} = \frac{0,389 \cdot 10^{-3}\ K^{-1} \cdot 4,34}{0,658^2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}^4\ \mathrm{s}^{-2}} = 3,89931 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4\ \mathrm{K}}$$

$$Ra = 1,530088 \cdot 10^9$$

$$K_T = \left(\frac{4,34}{3,0}\right)^{0,25} = 1,09671$$

$$Nu = 148,103$$

$$\alpha = \frac{0,629\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0,1\ \mathrm{m}} \cdot 148,103 = 932\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}$$

$$\dot{Q} = 3,73\ \mathrm{kW}$$

c) Öl

$$\frac{\beta\ Pr}{\nu^2} = \frac{0,7 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}\ 126}{8,7^2 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}^4\ \mathrm{s}^2} = 1,16528 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4\ \mathrm{K}}$$

$$Ra = 4,572556 \cdot 10^8$$

$$K_T \approx 1$$

(Annahme, da Stoffdaten lt. Aufgabenstellung etwa als konstant betrachtet werden)

4.2/3

$Nu = 92{,}090$

$$\alpha = \frac{0{,}122 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0{,}1\ \mathrm{m}} \ 92{,}09 = 112{,}4 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

$\dot{Q} = 449\ \mathrm{W}$

Diskussion der Ergebnisse

Der Zahlenwert von α wird durch die Größe von λ und $\beta\ Pr/\nu^2$ bestimmt.
Der Wärmeübergang an ein Gas ist deutlich schlechter als an eine Flüssigkeit, da Gase kleinere λ und - wegen kleinerer Dichte - größere kinematische Viskositäten $\nu = \eta/\varrho$ aufweisen.

Bei den untersuchten Flüssigkeiten nimmt α für Wasser infolge der guten Wärmeleitfähigkeit und der kleinen kinematischen Viskosität den größten Wert an.

Lösung 4.3

Gegeben: elektrischer Plattenheizkörper, $H = 0{,}6$ m, $B = 0{,}8$ m,
$\dot{Q} = 150$ W
Raumluft $t_U = 20$ ^{o}C

Gesucht: Wandtemperatur t_W

Der elektrische Plattenheizkörper gibt seine Wärme durch freie Konvektion an die Raumluft ab. Strahlungsvorgänge sollen nicht berücksichtigt werden.
Aus der Gleichung für die Wärmeübertragung infolge Konvektion

$$\dot{Q} = \alpha \ B \ H \ (t_W - t_U) \cdot 2$$

ergibt sich die mittlere Wandtemperatur des Heizkörpers

$$t_W = t_U + \frac{\dot{Q}}{\alpha \ B \ H \cdot 2}$$

Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten bei freier Konvektion an einer senkrechten Platte

charakteristische Abmessung $l = H$
Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = 0,5 \ (t_U + t_W) \approx 0,5 \ (20 + 60) = 40$ ^{o}C
(für die Wandtemperatur wurde $t_W = 60$ ^{o}C geschätzt)

Stoffwerte für Luft (Umdruck S.45)

$$\beta = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}, \ \nu = 17,26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \ Pr = 0,7122,$$

$$\lambda = 0,02716 \text{ W/(m K)}$$

Grashof-Zahl

$$Gr = \frac{\beta \ g \ H^3 \ (t_W - t_U)}{\nu^2} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3} \ \dfrac{1}{\text{K}} \ 9,81 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \ 0,6^3 \text{ m}^3 \ (60 - 20) \text{ K}}{(17,26 \cdot 10^{-6})^2 \text{ m}^4/\text{s}^2} =$$

$$= 9,1044 \cdot 10^8$$

Rayleigh-Zahl

$$Ra = Gr \ Pr = 9,1044 \cdot 10^8 \cdot 0,7122 = 6,4841 \cdot 10^8$$

Nußelt-Gleichung für freie Konvektion (Umdruck, S.38)

$$Nu = (0,11\ Ra^{1/3} + Ra^{0,1})\ K_T = 102,81$$

Bei Luft ist $K_T = 1$ (K_T Korrekturfaktor für temperaturabhängige Stoffwerte).

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha = Nu\ \frac{\lambda}{H} = 102,81\ \frac{0,02716\ \text{W/(m K)}}{0,6\ \text{m}} = 4,654\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}$$

Wandtemperatur

$$t_W = 20\ {}^o\text{C} + \frac{150\ \text{W}}{4,654\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}\ 0,8\ \text{m}\ 0,6\ \text{m} \cdot 2} = 53,57\ {}^o\text{C}$$

Da die berechnete Wandtemperatur von der angenommenen abweicht, wird die Rechnung nochmals wiederholt.

Nochmalige Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten

Annahme: $t_W = 55\ {}^o\text{C}$, $t_B = 0,5\ (20 + 55) = 37,5\ {}^o\text{C}$
Stoffwerte: $\beta = 3,226 \cdot 10^{-3},\ \nu = 17,02 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s},\ Pr = 0,7125,$
$\lambda = 0,02698\ \text{W/(m K)}$

Mit den obigen Gleichungen und den neuen Stoffwerten ergeben sich die Werte

$$Gr = 8,259 \cdot 10^8,\ Ra = 5,8846 \cdot 10^8,\ Nu = 99,71,\ \alpha = 4,483\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}$$

$$t_W = 54,85\ {}^o\text{C}$$

Die Annahme von 55 ^{o}C für die mittlere Wandtemperatur war genügend genau und die Iteration kann abgebrochen werden.

Lösung 4.4

Gegeben: waagerecht liegendes Rohr $L = 5$ m, $d_a = 0{,}052$ m
$t_W = 60\ ^o\text{C}$, $t_L = 20\ ^o\text{C}$

Gesucht: $\dot{Q}$

Übertragener Wärmestrom bei Konvektion vom Rohr an die Luft

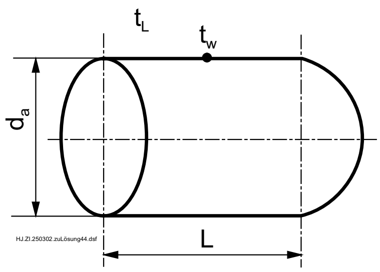
$$\dot{Q} = \alpha_a\ A\ (t_W - t_L) = \alpha_a\ \pi\ d_a\ L\ (t_W - t_L)$$

Berechnung von α_a bei freier Konvektion von Luft am waagerechten Rohr

charakteristische Abmessung $l = d_a$
Bezugstemperatur $t_B = 0,5\ (t_L + t_W) = 40\ ^o\text{C}$
Stoffdaten von Luft bei t_B (Umdruck S.45):

$\beta = 3,200 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$ $\qquad \nu = 17,26 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$

$\lambda = 0,02716\ \text{W/(m K)}$ $\qquad Pr = 0,7122$



Dimensionslose Kenngrößen Ra und Nu

$$Ra = \frac{\beta\ g\ d_a^3\ (t_W - t_L)\ Pr}{\nu^2}$$

$$= \frac{3,200 \cdot 10^{-3}\ K^{-1} \cdot 9,81\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,052^3\ \text{m}^3 \cdot 40\ \text{K} \cdot 0,7122}{\left(17,26 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)^2} = 4,2209 \cdot 10^5$$

Nußelt-Gleichung für freie Konvektion (Umdruck, S.38)

$$Nu = (0,11\ Ra^{1/3} + Ra^{0,1})\ K_T = 11,9035$$

$K_T = 1$ Korrekturfaktor für temperaturabhängige Stoffwerte

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_a = \frac{\lambda}{d_a}\ Nu = \frac{0,02716\ \dfrac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot 11,9035}{0,052\ m} = 6,217\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = 6,217\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ \text{K}}\ \pi \cdot 0,052\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} \cdot 40\ \text{K} = 203\ \text{W}.$$

Es tritt ein merklicher Wärmeverlust der Rohrleitung auf, so daß eine Isolierung erforderlich ist.

Gegeben: Doppelfenster,
$t_{W,i} = 10\ ^o\mathrm{C}$, $t_{W,a} = -\ 10\ ^o\mathrm{C}$, $\delta_L = 50$ mm und 5 mm

Gesucht: a), b) $\hat{\dot{q}} = f(\delta)$ für Doppelfenster
c) Einsetzen des konvektiven Wärmeüberganges
d) Darstellung $\hat{\dot{q}} = f(\delta)$

Bei der Berechnung des Doppelfensters werden nur die Vorgänge im Luftspalt und nur Wärmeleitung und Konvektion betrachtet.

Der flächenspezifische Wärmestrom durch den Luftspalt berechnet sich mit der Gleichung für den Wärmeübergang

$$\hat{\dot{q}} = \alpha\ (t_{W,i} - t_{W,a})$$

In dem Wärmeübergangskoeffizienten α sind sowohl die Wärmeübergänge an den beiden inneren Glasoberflächen als auch die Wärmeleitung in der Luftschicht enthalten. Die im Folgenden verwendete, aus Experimenten abgeleitete Nußelt-Gleichung basiert auf obiger Definition der Wärmestromdichte. Es ist ebenfalls möglich, durch Experimente eine Gleichung für $\lambda_{äqu}$ aufzustellen, wobei in $\lambda_{äqu}$ die Wirkung von Wärmeleitung und Konvektion erfaßt wird, und als Ausgangsgleichung die Beziehung für die Wärmestromdichte durch eine ebene Wand für die Wärmeleitung zu verwenden.

Freie Konvektion von Luft im Spalt

charakteristische Abmessung: $l = \delta_L$
Bezugstemperatur für Stoffwerte: $t_B = 0,5\ (t_{W,i} + t_{W,a}) = 0\ ^o\mathrm{C}$

Stoffwerte für Luft bei $t_B = 0\ ^o\mathrm{C}$ (Umdruck S.45)

$$\beta = 3,674 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \qquad \nu = 13,52 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

$$\lambda = 24,18 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} \qquad Pr = 0,7179$$

Wärmeübergangskoeffizient für den senkrechten Spalt (Umdruck, S.38, Fall B)

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_L}\ Nu = \frac{\lambda}{\delta_L}\ \left(1 + \frac{k\ Ra^n}{m + Ra}\right) \qquad \text{für } 1700 \leq Ra \leq 10^8$$

mit $k = 0{,}0236$, $m = 10100$, $n = 1{,}393$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_L} \qquad \text{für } Ra < 1700 \qquad \mathbf{4.5/2}$$

a) $\delta_L = 50$ mm

$$Ra = \frac{\beta\ g\ \delta_L^3\ (t_{W,i} - t_{W,a})\ Pr}{\nu^2}$$

$$= \frac{3,674 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\ 9,81\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ 0,05^3\ \mathrm{m}^3 \cdot 20\ \mathrm{K} \cdot 0,7179}{(135,2 \cdot 10^{-6})^2\ \dfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^2}} = 3,53882 \cdot 10^5$$

$$Nu = 1 + \frac{0,0236\ Ra^{1,393}}{10\ 100 + Ra} = 4,4785$$

$$\alpha = \frac{0,02418\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0,05\ m} \cdot 4,4785 = 2,166\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}$$

$$\hat{\dot{q}} = 2,166\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}} \cdot 20\ \mathrm{K} = 43,32\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

b) $\delta_L = 5$ mm

$$Ra = 353,8822 \qquad\qquad Nu = 1,000$$

$$\alpha = \frac{0,02418}{0,005}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}} = 4,836\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}}, \qquad \hat{\dot{q}} = 96,72\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Wegen $Ra < 1700$ liegt reine Wärmeleitung vor und es tritt keine Konvektion auf.

c) Der konvektive Wärmetransport setzt bei $Ra^* = 1700$ ein. Aus der Definition für die Rayleigh-Zahl ergibt sich die Luftschichtstärke.

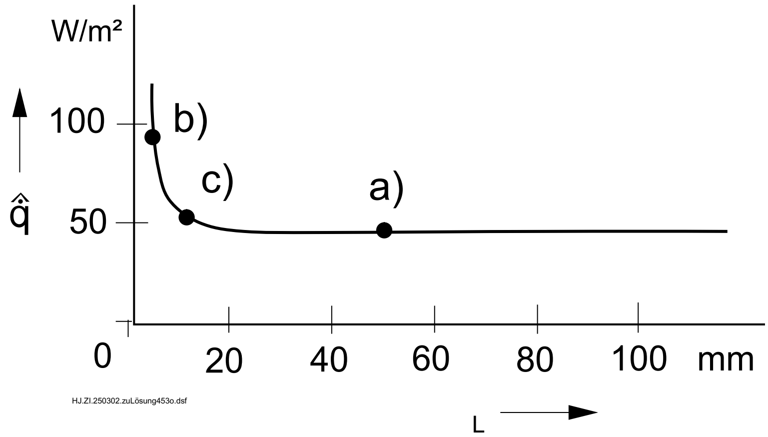
$$\delta_L = \left(\frac{Ra^*\ \nu^2}{\beta\ g\ (t_{W,i} - t_{W,a})\ Pr}\right)^{1/3}$$

$$\delta_L = \left(\frac{1700 \cdot (13,52 \cdot 10^{-6})^2\ \dfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^2}}{3,674 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\ 9,81\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\ \mathrm{K}\ 0,7179}\right)^{1/3} = 8,44\ \mathrm{mm}$$

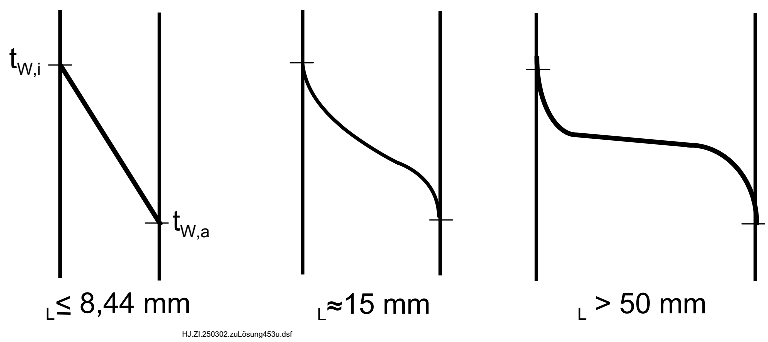
4.5/3

d) Abhängigkeit der Wärmestromdichte von der Spaltbreite
Mit zusätzlich berechneten Werten für Spaltbreiten von 10 mm, 20 mm und 100 mm erhält man

δ_L	mm	5	8,44	10	20	50	100
$\hat{\dot{q}}$	(W/m^2)	96,7	57,3	54,0	44,5	43,3	43,9



Mit wachsendem δ_L nimmt $\hat{\dot{q}}$ zunächst sehr stark ab, wächst bei sehr großen Spaltbreiten jedoch wieder leicht an. Hierbei überlagern sich zwei Tendenzen. Je dicker der Luftspalt ist, desto größer wird die Isolierwirkung der Luft. Ab einer bestimmten Dicke des Luftspaltes wird die zunehmende Isolierwirkung aber wieder durch den wachsenden konvektiven Wärmetransport zunichte gemacht, da bei größerer Spaltbreite eine stärkere zirkulierende Luftbewegung zwischen den Glasscheiben auftritt.
Temperaturverläufe im Glasspalt bei verschiedenen δ_L.



Lösung 4.6

Gegeben: Elektronische Bauelemente, $L = 2$ cm, $B = 1$ cm, $t_W = 20\ ^o$C
Luftstrom $w = 15$ m/s, $t_L = 80\ ^o$C

Gesucht: Wärmeübergangskoeffizient
α_1 bei Strömung über Längsseite
α_2 bei Strömung über Breitseite

Es liegt eine erzwungene Strömung über einer Platte vor. Da in den Gleichungen für die Nu-Zahl im Umdruck S.39 die Bezugstemperatur für laminare und turbulente Strömung unterschiedlich ist, muß eine Annahme zum Strömungscharakter getroffen werden. Bei Annahme einer laminaren Strömungsgrenzschicht am Bauteil gilt die mittlere Grenzschichttemperatur als Bezugstemperatur. Der Wärmeübergangskoeffizient soll für den Beginn des Aufwärmvorganges berechnet werden, bei dem das Bauelement noch die Temperatur t_W aufweist.

Bezugstemperatur für Stoffwerte
$t_B = 0,5\ (t_W + t_L) = 0,5\ (20 + 80)\ ^o\mathrm{C} = 50\ ^\circ\mathrm{C}$

Stoffwerte für Luft (Umdruck S.45)

$$\lambda = 0,02788\ \mathrm{W/(m\ K)},\ \ \nu = 18,27 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s},\ \ Pr = 0,7111$$

Strömung über Längsseite

charakteristische Abmessung $l = L = 2$ cm

$$Re\text{-Zahl} \qquad Re = \frac{w\ L}{\nu} = \frac{15\ \mathrm{m/s}\ 0,02\ \mathrm{m}}{18,27 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}} = 16420$$

laminar, da $Re < 3,5 \cdot 10^5$

$$Nu\text{-Zahl} \qquad Nu = 0,664\ Re^{0,5}\ Pr^{1/3}\ K_T = 0,664 \cdot 16420^{0,5}\ 0,7111^{1/3} \cdot 1 =$$

$$= 75,945\ (K_T = 1,\ \text{da Luft})$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_1 = Nu\ \frac{\lambda}{L} = 75,945\ \frac{0,02788}{0,02}\ \frac{\mathrm{W/(m\ K)}}{\mathrm{m}} = 105,9\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

Strömung über Breitseite

charakteristische Abmessung $l = B = 1$ cm

$$Re\text{-Zahl} \qquad Re = \frac{w\ B}{\nu} = \frac{15\ \text{m/s}\ 0,01\ \text{m}}{18,27 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}} = 8210, \text{ laminar}$$

$$Nu\text{-Zahl} \qquad Nu = 0,664 \cdot 8210^{0,5} \cdot 0,7111^{1/3} \cdot 1 = 53,702$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_2 = Nu\ \frac{\lambda}{B} = 53,702\ \frac{0,02788}{0,01} \frac{\text{W/(m}^2\ \text{K)}}{\text{m}} = 149,7\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Bei der Strömung über die Breitseite ist der Wärmeübergangskoeffizient größer als bei der Strömung über die Längsseite, da wegen der kürzeren Strömungslänge die Grenzschichtdicke im Mittel kleiner ist.

Lösung 4.8

Gegeben: Durchströmtes Rohr $L = 2$ m, $d_i = 60$ mm
Wasser $t_F = 70\ ^o$C, $w = 1$ m/s

Gesucht: α_i und $\dot{Q}$ für

a) $t_{W,i} = 50\ ^o$C b) $t_{W,i} = 90\ ^o$C

Wärmestrom

$t_{W,i} < t_F$: Flüssigkeit wird gekühlt (Fall a))

$$\dot{Q} = \alpha_i\ \pi\ d_i\ L\ (t_F - t_{W,i})$$

$t_{W,i} > t_F$: Flüssigkeit wird erwärmt (Fall b))

$$\dot{Q} = \alpha_i\ \pi\ d_i\ L\ (t_{W,i} - t_F)$$

In beiden Fällen sind t_F und $\mid t_{W,i} - t_F \mid$ gleich groß. Die Gleichungen sind entsprechend dem üblichen Vorgehen in der Praxis so formuliert, daß sich ein positiver Wärmestrom ergibt.

Wärmeübergang bei erzwungener Konvektion

charakteristische Abmessung $l = d_i$
Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = t_F = 70\ ^o$C
Stoffwerte von Wasser bei t_B (Umdruck S.46):
$\lambda = 0{,}659$ W/(m K) $Pr = 2{,}570$
$\nu = 0,414 \cdot 10^{-6}$ m^2/s

Re-Zahl

$$Re = \frac{w\ d_i}{\nu} = \frac{1\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,06\ \text{m}}{0,414 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 1,44928\ \cdot 10^5$$

Es liegt eine turbulente Strömung vor, da $Re > 2300$ ist.
Nu-Gleichung für turbulente Rohrströmung (Umdruck, S.40)

$$Nu = 0,0235\ (Re^{0,8} - 230) \left(1 + \left(\frac{d_i}{L}\right)^{2/3}\right) \cdot (1,8\ Pr^{0,3} - 0,8)\ K_T = Nu^0\ K_T$$

4.8/2

Ergebnisse

a) $t_{W,i} = 50\ ^o\mathrm{C}$

$$Nu^o = 541,636$$

$$Pr_W = Pr(50\ ^o\mathrm{C}) = 3,57, \qquad K_T = \left(\frac{Pr}{Pr_W}\right)^{0,25} = 0,92112$$

$$Nu = Nu^o\ K_T = 498,912$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{d_i}\ Nu = \frac{0,659\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0,06\ \mathrm{m}} \cdot 498,912 = 5480\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

$$\dot{Q} = 5480\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}} \cdot \pi \cdot 0,06\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{K} = 41,3\ \mathrm{kW}$$

b) $t_{W,i} = 90\ ^o\mathrm{C}$

$$Pr_W = 1,969, \qquad K_T = 1,06886$$

$$Nu = 578,935, \qquad \alpha_i = 6359\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

$$\dot{Q} = 47,9\ \mathrm{kW}$$

Diskussion

Infolge der mit wachsender Temperatur kleiner werdenden Pr-Zahl von Wasser hängt α_i bei gleicher Fluidtemperatur und gleicher Temperaturdifferenz $\mid t_W - t_F \mid$ von der Richtung des Wärmestromes ab.
Bei $t_W > t_F$, d. h. bei Erwärmung des Fluids, ist der Wärmeübergangskoeffizient größer als bei der Abkühlung des Fluids. Der höhere Wärmeübergangskoeffizient beim Erwärmen kommt durch den höheren Geschwindigkeitsgradienten an der Wand zustande und dieser ist wiederum durch die kleinere Viskosität des Wassers bei der höheren Wandtemperatur verursacht. Demgegenüber stellt sich beim Abkühlen ein kleinerer Geschwindigkeitsgradient an der Wand ein, da die Viskosität des Fluids in Wandnähe größer ist.

Wenn der Korrekturfaktor $K_T = (\eta/\eta_W)^{0,14}$ verwendet wird, ändern sich die Werte etwas:

$$\text{bei } t_{W,i} = 50\ ^\circ\mathrm{C} \qquad K_T = \left(\frac{404,4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/(m\ s)}}{547,1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/(m\ s)}}\right)^{0,14} = 0,958$$

$$\text{bei } t_{W,i} = 90\ ^\circ\mathrm{C} \qquad K_T = \left(\frac{404,4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/(m\ s)}}{315,0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/(m\ s)}}\right)^{0,14} = 1,036.$$

Lösung 4.9

Gegeben: Durchströmte Rohre eines Wärmeübertragers
$d_i = 10$ mm, $L = 1{,}5$ m

Wasser $p = 0{,}1$ MPa, $t_1 = 20\ ^o$C, $t_2 = 60\ ^o$C,
$w = 0{,}5$ m/s

Gesucht: α_i und $t_{W,i}$

Wärmeübergang bei erzwungener Konvektion, 1. Näherung

Es liegt eine erzwungene Konvektionsströmung von Wasser im Rohr vor.

charakteristische Abmessung $l = d_i$
Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = 0,5\ (t_1 + t_2) = 40\ ^o$C

Stoffwerte von Wasser bei t_B (Umdruck, S.46)

$$\varrho = 992,2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad Pr = 4,34, \quad \lambda = 0,629\ \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$c_p = 4,179\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}, \quad \nu = 0,658 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Re-Zahl

$$Re = \frac{w\ d_i}{\nu} = \frac{0,5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,01\ \text{m}}{0,658 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 7599 > Re_{kr} = 2300\ \text{(turbulent)}.$$

Nußelt-Gleichung für turbulente Rohrströmung (Umdruck S.40)

$$Nu = 0,0235\ (Re^{0,8} - 230)\ \left(1 + \left(\frac{d_i}{L}\right)^{2/3}\right) (1,8\ Pr^{0,3} - 0,8)\ K_T$$

mit $K_T = \left(\dfrac{Pr}{Pr_W}\right)^{0,25}$.

Da die Wandtemperatur $t_{W,i}$ unbekannt ist, wird näherungsweise $K_T = 1$ gesetzt. Die Berechtigung dafür ist durch Berechnung von $t_{W,i}$ zu überprüfen.

Erste Näherungsrechnung für α_i

4.9/2

$$Nu = 0,0235\ (7599^{0,8} - 230)\ \left(1 + \left(\frac{0,01}{1,5}\right)^{2/3}\right)\ (1,8 \cdot 4,34^{0,3} - 0,8)$$

$$Nu = 50,620$$

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{\lambda}{d_i}\ Nu = \frac{0,629\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}}{0,01\ \mathrm{m}}\ 50,620 = 3184\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}}$$

Ermittlung der inneren Wandtemperatur

Aus der Energiebilanz folgt mit der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{Q} = \dot{m}\ c_p\ (t_2 - t_1) = \varrho\ w\ \frac{\pi}{4}\ d_i^2\ c_p\ (t_2 - t_1)$$

und aus dem Newtonschen Wärmeübergangsgesetz

$$\dot{Q} = \alpha_i\ A\ \Delta t_m = \alpha_i\ \pi\ d_i\ L\ \frac{t_2 - t_1}{\ln \dfrac{t_{W,i} - t_1}{t_{W,i} - t_2}}\ .$$

Nach Einsetzen und Umstellen erhält man

$$\frac{t_{W,i} - t_1}{t_{W,i} - t_2} = \exp\left(\frac{\alpha_i\ \pi\ d_i\ L\ (t_2 - t_1)}{\dot{Q}}\right) = \exp\left(\frac{4\ \alpha_i\ L}{\varrho\ w\ c_p\ d_i}\right)$$

$$t_{W,i} = \frac{t_1 - K\ t_2}{1 - K}.$$

Mit

$$K = \exp\left(\frac{4\ \alpha_i\ L}{\varrho\ w\ c_p\ d_i}\right) = \exp\left(\frac{4 \cdot 3184\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}} \cdot 1,5\ \mathrm{m}}{992,2\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 0,5\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4179\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}} \cdot 0,01\ \mathrm{m}}\right)$$

$$K = 2,513$$

ergibt sich

$$t_{W,i} = \frac{10\ ^\circ\mathrm{C} - 2,513 \cdot 60\ ^\circ\mathrm{C}}{1 - 2,513} = 86,4\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Korrigierte Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten

Die Wandtemperatur geht nur über den Korrekturfaktor K_T in die Nußeltgleichung ein, so daß nur dieser aktualisiert werden muß.

Mit der Prandtl-Zahl bei der Wandtemperatur $t_{W,i} \approx 85\ ^o\mathrm{C}$ aus Umdruck S.46

$$Pr_W = 2,102 \qquad \text{erhält man} \qquad K_T = \left(\frac{Pr}{Pr_W}\right)^{0,25} = 1,1987.$$

Damit wird

$$\alpha_i^{(2)} = \alpha_i^{(1)}\ K_T = 3817\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}},\ K = 3,018,\ t_{W,i} = 79,8\ ^o\mathrm{C}.$$

Eine nochmalige Durchrechnung mit $t_{W,i} \approx 80\ ^o\mathrm{C}$ ergibt mit

$$Pr_W = 2,234 \quad \text{und} \quad K_T = 1,1806$$

$$\alpha_i = 3759\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ K}},\ K = 2,968,\ t_{W,i} = 80,3\ ^o\mathrm{C}$$

Eine weitere Iteration ist nicht nötig.

Lösung 4.10

Gegeben: Kanalströmung von Wasser
$t_F = 80\ ^o\mathrm{C}$, $\dot{m} = 2880$ kg/h

Kanal $L = 5$ m, verschiedene Querschnittsformen

Gesucht: Innerer Wärmeübergangskoeffizient α_i für
a) Kreis c) Rechteck
b) Ringspalt d) Spalt zwischen Kreis und Rechteck

Es liegt eine erzwungene Konvektion in einem Kanal vor.

Bezugstemperatur für die Stoffwerte: $t_B = t_F = 80\ ^o\mathrm{C}$
Stoffwerte von Wasser bei t_B (Umdruck S.46):

$$\lambda = 0,667\ \mathrm{W/(m\ K)}, \qquad Pr = 2,234$$

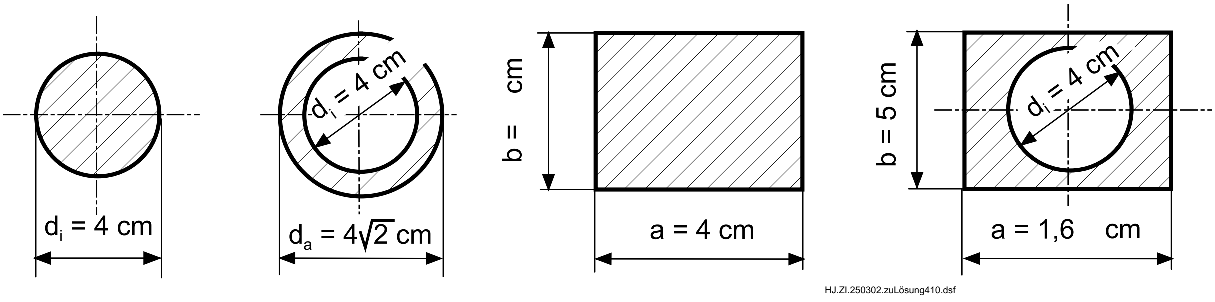
$$\nu = 0,365 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}, \qquad \varrho = 971,6\ \mathrm{kg/m^3}$$

Als charakteristische Abmessung ist der gleichwertige Durchmesser zu verwenden (A Strömungsquerschnitt, U benetzter Umfang).

$$l = d_{gl} = 4\ A/U$$

Querschnittsformen

a) Kreis b) Ringspalt c) Rechteck d) Spalt zwischen Kreis u. Rechteck



	a)	b)	c)	d)
A	$\frac{\pi}{4}\ d_i^2$	$\frac{\pi}{4}\ (d_a^2 - d_i^2)$	$a\ b$	$a\ b - \frac{\pi}{4}\ d_i^2$
U	$\pi\ d_i$	$\pi\ (d_a + d_i)$	2 (a + b)	2 (a + b) + $\pi\ d_i$
d_{gl}	d_i	$d_a - d_i$	$\dfrac{2\ a\ b}{a+b}$	$\dfrac{4\ a\ b - \pi\ d_i^2}{2\ (a+b) + \pi\ d_i}$
A/cm^2	$4\ \pi$	$4\ \pi$	$4\ \pi$	$4\ \pi$
d_{gl}/cm	4	1,6569	3,5110	1,5410

Alle Kanäle haben identische Strömungsquerschnitte und daher auch identische Strömungsgeschwindigkeiten w.
Die Strömungsgeschwindigkeit berechnet sich aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \varrho\ w\ A$$

zu

$$w = \frac{\dot{m}}{\varrho\ A} = \frac{2880\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{h}} \cdot \dfrac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}}}{971,6\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\ 4\ \pi \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 0,655\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für die Re-Zahl gilt

$$Re = \frac{w\ d_{gl}}{\nu}$$

Für alle Kanalformen ist $Re > 2300$ (siehe nächste Tab.).
Daher gilt die Nu-Gleichung für eine turbulente Kanalströmung

$$Nu = 0,0235\ (Re^{0,8} - 230) \left(1 + \left(\frac{d_{gl}}{L}\right)^{2/3}\right)\ (1,8\ Pr^{0,3} - 0,8)\ K_T$$

Mit der Annahme $t_W \approx t_F$ wird

$$K_T = 1 \text{ und}$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{d_{gl}}\ Nu = \frac{\lambda}{d_{gl}} \cdot 0,0235\ (Re^{0,8} - 230)\ \left(1 + \left(\frac{d_{gl}}{L}\right)^{2/3}\right) \cdot (1,8\ Pr^{0,3} - 0,8)$$

Zahlenergebnisse:

		a)	b)	c)	d)
Re		71806	29744	63175	27663
Nu		271,17	127,52	243,18	119,75
α_i	(W m^{-2}K^{-1})	4522	5133	4609	5183

Bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit ist der Wärmeübergangskoeffizient α_i in dem Kanal mit dem kleinsten gleichwertigen Durchmesser (Spalt d) am größten. Es ist aber zu beachten, daß für diesen Fall auch die größten Druckverluste auftreten.