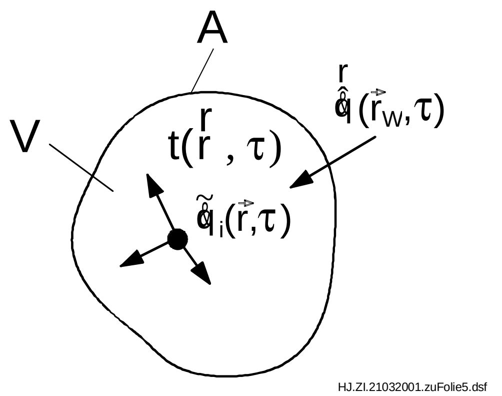


Homogener, isotroper, ruhender, fester Körper

Energiebilanz
$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dH}{d\tau} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_i$$

zeitliche Änderung der Enthalpie des Körpers

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_V \rho\, c_p\, t\, dV = \int_V \rho\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau}\, dV$$

von außen zugeführter Energiestrom

$$\dot{Q}_a = -\int_A \dot{\vec{q}}\, d\vec{A} = -\int_V \operatorname{div} \dot{\vec{q}}\, dV = \int_V \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} t\right) dV$$

Gaußscher Integralsatz Fouriersches Gesetz

von innen zugeführter Energiestrom

$$\dot{Q}_i = \int_V \dot{\tilde{q}}_i\, dV \qquad \left[\dot{\tilde{q}}_i\right] = 1\,\frac{W}{m^3}$$

Einsetzen und Umformen

$$\int_V \left(\rho\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} - \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} t\right) - \dot{\tilde{q}}_i \right) dV = 0$$

Fouriersche Differentialgleichung

$$\boxed{\rho\, c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} t\right) + \dot{\tilde{q}}_i}$$

Fouriersche Differentialgleichung des Temperaturfeldes in festen Körpern

Wärmeübertragung

allgemeine Form

$$\rho \; c_p \; \frac{\partial t}{\partial \tau} \; = \; \operatorname{div}\,(\lambda \; \operatorname{grad} t) \; + \; \tilde{\dot{q}}_i$$

instationäres Glied   Transportglied   Quellglied

konstante Stoffwerte

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \; \operatorname{div} \operatorname{grad} \; t + \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\rho \; c_p} \quad , \; a = \frac{\lambda}{\rho \; c_p}$$

stationärer Fall

$$\lambda \; \operatorname{div} \operatorname{grad} \; t + \tilde{\dot{q}}_i \; = \; 0$$

Poissonsche Dgl.

Stationärer und wärmequellenfreier Fall

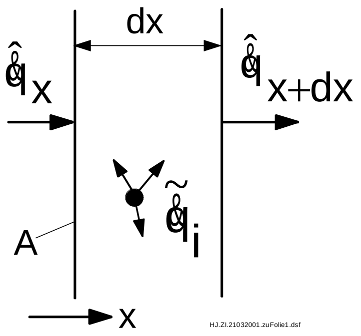
div grad t = 0   Laplace`sche Dgl.

eindimensional (ebener Fall)

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

Differentialoperatoren div grad im Umdruck S. 3

Vereinfachungen der Fourierschen Differentialgleichung	Wärmeübertragung



Annahmen:
ebene Wand
konstante Stoffwerte

Energiebilanz
$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dH}{d\tau} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_i$$

Enthalpieänderung
$$dH = \rho \; c_p \, A \, dx \, dt$$

Wärmestrom über Oberflächen der Wand

$$\dot{Q}_a = \left(\dot{\hat{q}}_x - \dot{\hat{q}}_{x+dx}\right) A = \left(\dot{\hat{q}}_x - \left(\dot{\hat{q}}_x + \frac{\partial \dot{\hat{q}}_x}{\partial x} dx\right)\right) A = - \frac{\partial \dot{\hat{q}}_x}{\partial x} dx \, A$$

Wärmestrom durch innere Wärmequellen

$$\dot{Q}_i = \dot{\tilde{q}}_i \; A \; dx$$

Fouriersches Erfahrungsgesetz

$$\dot{\hat{q}}_x = - \lambda \frac{dt}{dx} \qquad \frac{\partial \dot{\hat{q}}_x}{\partial x} = - \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Einsetzen

$$\rho \, c_p \, A \, dx \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \, A \, dx \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + A \, dx \, \dot{\tilde{q}}_i$$

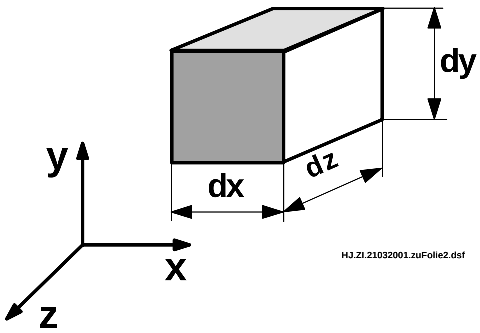
$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_2} + \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{\rho \, c_p}} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho \, c_p}$$

Fouriersche Differentialgleichung
für ebene Wand

Wärmeübertragung

$\vec{e}$ ist Einheitsvektor in betreffende Koordinatenrichtung, v Variable (z. B. t).

kartesische Koordinaten

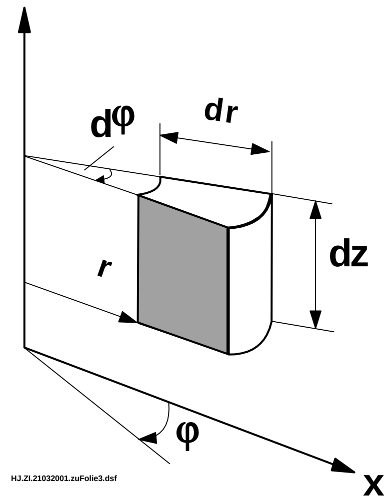


$$\operatorname{grad}\ v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Zylinderkoordinaten

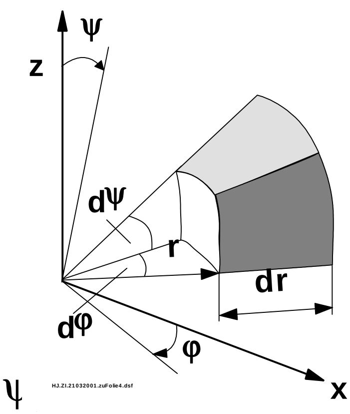


$$\operatorname{grad}\ v = \frac{\partial v}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}\ \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten

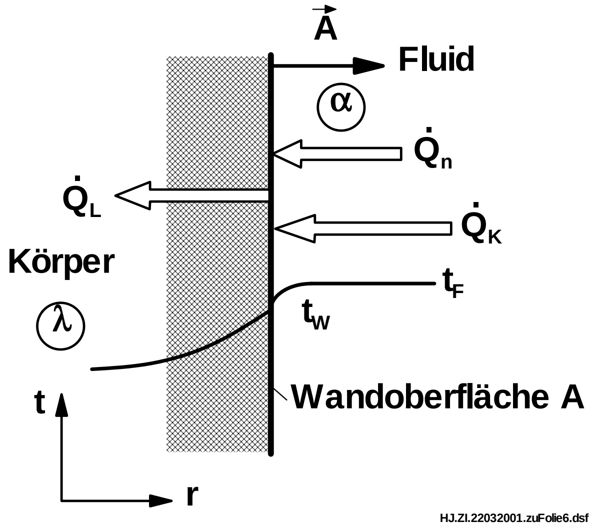


$$\operatorname{grad}\ v = \frac{\partial v}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \psi}\vec{e}_\psi + \frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{div}\ \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, v_r\right) + \frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}(v_\psi \sin\psi$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\psi}{r^2\sin\psi}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$$

Zusammenstellung der Differentialoperatoren	Wärmeübertragung



Energiebilanz a

$$\dot{Q}_K + \dot{Q}_n = \dot{Q}_L$$

übertragener Wärmestrom durch Konvektion

$$\dot{Q}_K = \alpha\, A \left(t_F - t_W\right)$$

übertragener Wärmestrom durch Strahlung

$$\dot{Q}_n = \hat{\dot{q}}_n\, A$$

durch Leitung abgeführter Wärmestrom

$$\dot{Q}_L = \lambda \left(\frac{dt}{dr}\right)_W A$$

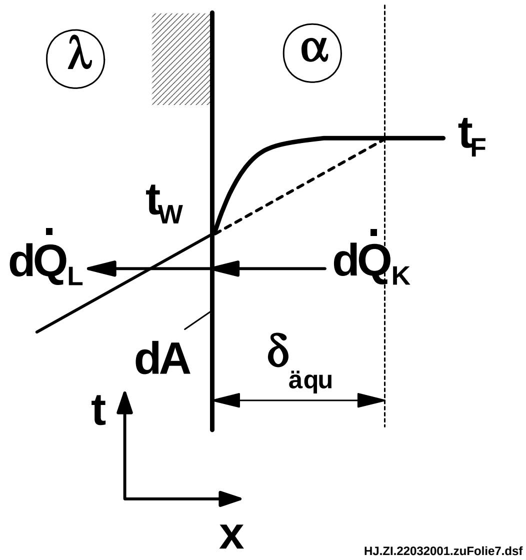
Einsetzen

$$\alpha \left(t_F - t_W\right) + \hat{\dot{q}}_n = \lambda \left(\frac{dt}{dr}\right)_W$$

Lösung der Differentialgleichung

Wärmeströme an der Oberfläche

$$d\dot{Q}_L = d\dot{Q}_K$$



Wärmeleitung in den Körper

$$d\dot{Q}_L = \lambda \; dA \left(\frac{dt}{dx} \right)_W$$

Wärmeübergang an der Oberfläche

$$d\dot{Q}_K = \alpha \; dA \left(t_F - t_W \right)$$

Temperaturgradient im Körper an der Wand

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_W = \underbrace{\frac{\alpha}{\lambda} \left(t_F - t_W \right)}_{\text{aus obigen Gleichungen}} = \underbrace{\frac{t_F - t_W}{\delta_{äqu}}}_{\text{aus Bild}}$$

äquivalente Wandstärke

$$\boxed{\delta_{äqu} = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

Fouriersche Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\,\operatorname{grad} t = 0$$

ebene Wand

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 0$$

Integration

$$\frac{dt}{dx} = C_1$$

$$t = C_1\,x + C_2$$

Randbedingungen

$$x = x_i \qquad t = t_{W,i}$$

$$x = x_a \qquad t = t_{W,a}$$

Integrationskonstanten

$$C_1 = -\frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{x_a - x_i}\,, \qquad C_2 = t_{W,i} + \frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{x_a - x_i}\,x_i$$

Temperaturverlauf

$$\boxed{t = t_{W,i} - \frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{x_a - x_i}\left(x - x_i\right)}$$

Stationärer Temperaturverlauf in einer ebenen Wand	Wärmeübertragung

Fouriersche Differentialgleichung $\operatorname{div} \operatorname{grad} t = 0$

Zylinderwand
$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = 0$$

Substitution $u = dt/dr$

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$$

Integration

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dr}{r} \qquad \int d\left(r\frac{dt}{dr}\right) = 0$$

$$\ln u = -\ln r + C \qquad r\frac{dt}{dr} = C_1$$

$$u = \frac{C_1}{r}$$

$$\int dt = C_1 \int \frac{dr}{r} \qquad \int dt = C_1 \int \frac{dr}{r}$$

$$t = C_1 \ln r + C_2$$

Randbedingungen

$$r = r_i \qquad t = t_{W,i}$$

$$r = r_a \qquad t = t_{W,a}$$

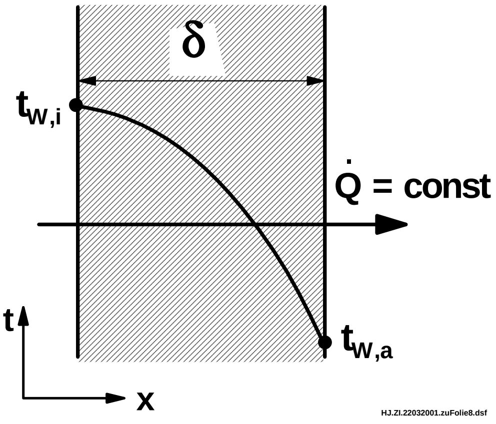
Temperaturverlauf

$$\boxed{t = t_{W,i} - \frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i}}$$

Stationärer Temperaturverlauf in einer Zylinderwand	Wärmeübertragung

Annahme:

$$\lambda(t) = \lambda_o \left(1 + b\,t\right) \quad , \quad b \gtreqless 0$$



Herleitung für ebene Wand

$$\dot{Q} = -\ \lambda(t)\ A\ \frac{dt}{dx} = -\,\lambda_0 \left(1 + b\,t\right) A\ \frac{dt}{dx}$$

T.d.V. und Integration

$$\dot{Q} \int_{x_i}^{x_a} dx = -\,\lambda_o\ A \int_{t_{W,i}}^{t_{W,a}} \left(1 + b\ t\right) dt$$

$$\dot{Q} = -\,\frac{\lambda_o\ A}{x_a - x_i} \left[1 + \frac{b}{2}\left(t_{W,a} + t_{W,i}\right)\right]\left(t_{W,a} - t_{W,i}\right)$$

Koeffizientenvergleich mit Ansatz

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_m\ A}{\delta}\left(t_{W,i} - t_{W,a}\right) \quad , \quad \delta = x_a - x_i$$

mittlerer Wärmeleitkoeffizient

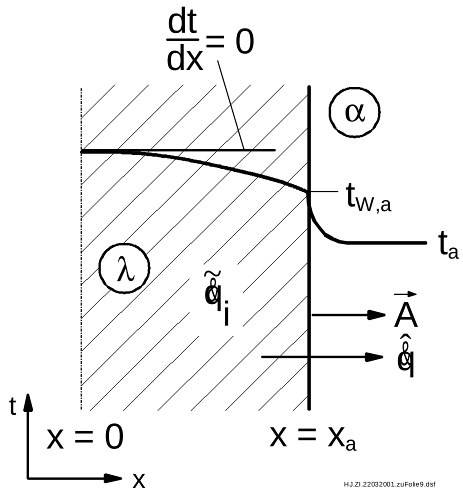
$$\lambda_m = \lambda_0 \left[1 + \frac{b}{2}\left(t_{W,a} + t_{W,i}\right)\right] = \lambda_0 \left(1 + b\ t_{W,m}\right) = \lambda\left(t_{W,m}\right)$$

allgemeine Lösung

$$\boxed{\lambda_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\ dt}$$

Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitkoeffizienten	Wärmeübertragung

Herleitung für ebene Wand



Fouriersche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\lambda} = 0$$

Integration (Annahme $\tilde{\dot{q}}_i = \text{const}$)

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\lambda}\, x + C_1$$

$$t = -\frac{\tilde{\dot{q}}_i}{2\,\lambda}\, x^2 + C_1\, x + C_2$$

Randbedingungen

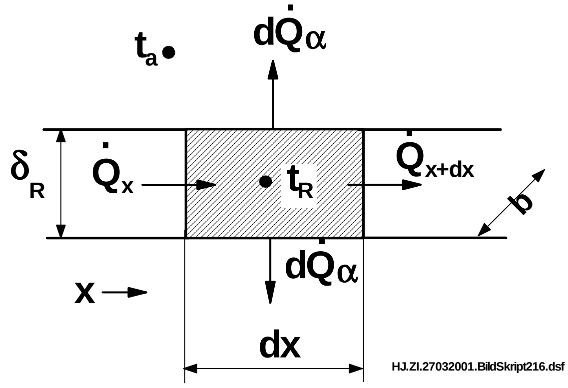
$$x = 0: \quad \frac{dt}{dx} = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$$

$$x = x_a: \quad t = t_{W,a} \;\rightarrow\; C_2 = t_{W,a} + \frac{\tilde{\dot{q}}_i\, x_a^2}{2\,\lambda}$$

Temperaturverteilung

$$\boxed{t = \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{2\,\lambda}\left(x_a^2 - x^2\right) + t_{W,a}}$$

Energiebilanz für Rippenelement



$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + 2\, d\dot{Q}_\alpha$$

an Umgebung abgegebener Wärmestrom

$$d\dot{Q}_\alpha = \alpha_R\, b\, dx\left(t_R - t_a\right)$$

Änderung des Wärmestromes über der Rippenhöhe

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx}\, dx + \ldots$$

Fouriersches Grundgesetz

$$\dot{Q}_x = -\lambda_R\, b\, \delta_R \frac{dt}{dx} \quad , \quad \frac{d\dot{Q}}{dx} = -\lambda_R\, b\, \delta_R \frac{d^2 t}{dx^2}$$

Einsetzen (Rippenübertemperatur $\theta = t_R - t_a$)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2\alpha_R}{\delta_R\, \lambda_R}\, \theta = 0$$

Rippengröße $$m = \sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R\, \delta_R}}$$

Lösungsansatz und Lösung

$$\theta = e^{rx} \;\rightarrow\; r^2 e^{rx} - m^2 e^{rx} = 0 \;\rightarrow\; r = \pm m$$

$$\theta = C_1\, e^{mx} + C_2\, e^{-mx}$$

Randbedingungen

$$x = 0: \quad \theta = \theta_a = t_{W,a} - t_a \quad \rightarrow \quad \theta_a = C_1 + C_2$$

$$x = H: \quad \dot{Q}_x = 0 \;\rightarrow\; \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=H} = 0 \;\rightarrow\; C_1\, e^{mH} - C_2\, e^{-mH} = 0$$

Berechnung der Konstanten

$$C_1 = \theta_a \frac{e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \quad , \quad C_2 = \theta_a \frac{e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH}}$$

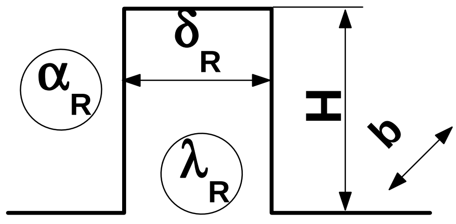
Temperaturverlauf

$$\boxed{\theta = \theta_a \frac{e^{(H-x)m} + e^{-(H-x)m}}{e^{mH} + e^{-mH}} = \theta_a \frac{\cosh\left[m\left(H - x\right)\right]}{\cosh\left(m\, H\right)}}$$

Temperaturverlauf in ebener Rippe	Wärmeübertragung

Gegeben: Volumen für ebene Rippe

Gesucht: Maximum von $\dot{Q}_{RF}$



HJ.ZI.27032001.Bild1Folie.dsf

Von Rippe abgegebener Wärmestrom

$$\dot{Q}_{RF} = A_{RF}\,\theta_a\,\alpha^* = A_{RF}\,\theta_a\,\lambda_R\,m\tanh(m\,H)$$

Einsetzen von

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R\,\delta_R}} \quad , A_{RF} = \delta_R\,b \quad , \quad V = \delta_R\,b\,H$$

Eliminieren von H

$$\dot{Q}_{RF} = \underbrace{\lambda_R\,\theta_a\,b\sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R}}}_{\text{const}}\sqrt{\delta_R}\,\tanh\left(\sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R}}\,\frac{V}{b}\,\frac{1}{\delta_R^{3/2}}\right)$$

Extremwert suchen

$$\frac{d\dot{Q}_{RF}}{d\delta_R} = 0 \qquad \frac{d\tanh x}{dx} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\delta_R}}\tanh(m\,H) + \sqrt{\frac{2\alpha_R}{\lambda_R}}\,\frac{V}{b}\,\sqrt{\delta_R}\left(1-\tanh^2(mH)\right)\left(-\frac{3}{2\delta_R^{5/2}}\right) = 0$$

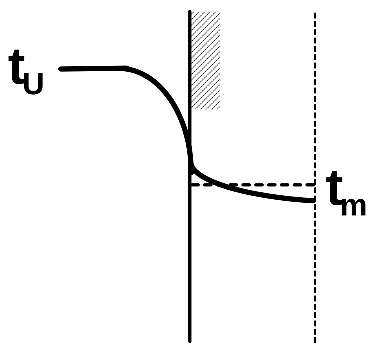
$$\tanh(mH) = 3m\,H\left(1-\tanh^2(mH)\right)$$

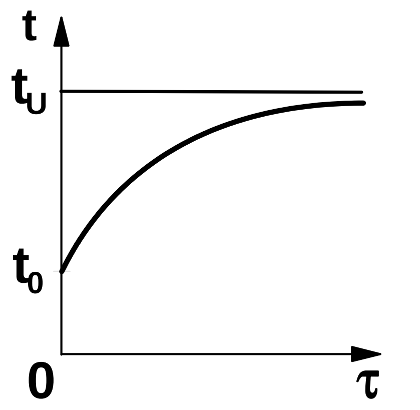
iterative Lösung $(mH)_{opt} = 1{,}42$

optimales Verhältnis von Rippenhöhe zu Rippenstärke

$$\boxed{\left(\frac{H}{\delta_R}\right)_{opt} = 1{,}42\sqrt{\frac{\lambda_R}{2\alpha_R\,\delta_R}} = \sqrt{\frac{\lambda_R}{\alpha_R\,\delta_R}}}$$

Optimale Rippenabmessung | Wärmeübertragung





HJ.ZI.27032001.BildSkript31.dsf

Enei

$$\frac{dH}{d\tau} = \dot{Q} = k\,A\left(t_U - t\right)$$

Enthalpieänderung

$$dH = \rho\,c\,V\,dt$$

T.d.V.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{t_U - t} = \frac{k\,A}{\rho\,c\,V} \int_0^{\tau} d\tau$$

Integration

$$\ln \frac{t_U - t}{t_U - t_0} = -\frac{k\,A}{\rho\,c\,V}\,\tau$$

dimensionslose Temperatur

$$\vartheta = \frac{t - t_U}{t_0 - t_U}$$

Zeitkonstante

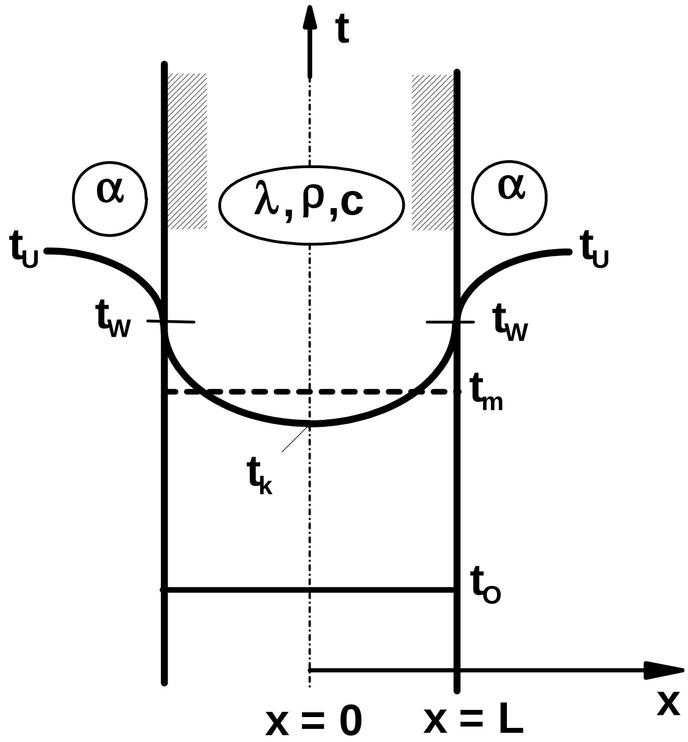
$$\tau_0 = \frac{\rho\,c\,V}{k\,A}$$

Zeitliche Temperaturänderung des Körpers

$$\boxed{\vartheta = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)}$$

Quasistatische instationäre Wärmeleitung	Wärmeübertragung

Erwärmung einer
ebenen Platte



Differentialgleichungen

Platte $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Zylinder $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{a}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial t}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial r}\right)$$

Kugel $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{a}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial t}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial t}{\partial r}\right)$$

Randbedingung $$\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_W = \alpha\,(t_U - t_W)$$

Dimensionslose Darstellung

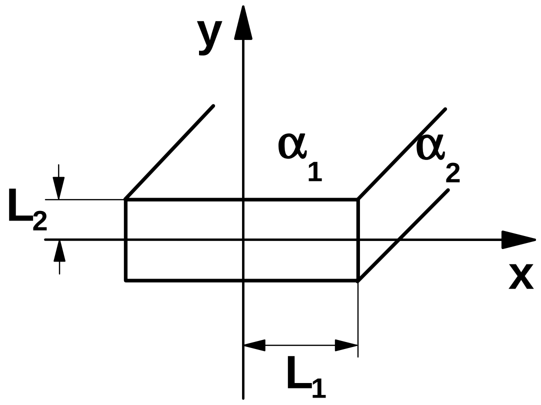
Dgl. $$\frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = \frac{1}{\xi^n}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^n\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)$$

n = 0 Platte, n = 1 Zylinder, n = 2 Kugel

Rdb. 3. Art $$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + Bi\,\vartheta\right)_{\xi = 1} = 0$$

Gröberlösung	Wärmeübertragung

Unendlich langer
Balken



HJ.ZI.10042001.zuFolie18.dsf

Dgl. $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

Dimensionslose Größen

$$Fo_1 = \frac{a\,\tau}{L_1^2} \;,\quad Fo_2\ \frac{a\,\tau}{L_2^2} \;,\quad \vartheta = \frac{t - t_U}{t_0 - t_U} \;,\quad \xi_1 = \frac{x}{L_1} \;,\quad \xi_2 = \frac{y}{L_2}$$

dimensionslose Dgl.

$$\tau\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = Fo_1\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi_1^2} + Fo_2\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi_2^2}$$

Lösungsansatz $\vartheta = \Phi\left(Fo_1\,,\,\xi_1\right)\ \Psi\left(Fo_2\,,\,\xi_2\right)$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\,\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\,\Phi \quad,\quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi_1^2} = \Psi\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_1^2}$$

etzen

$$\underbrace{\frac{1}{\Phi}\left(\tau\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - Fo_1\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_1^2}\right)} = -\,\frac{1}{\Psi}\left(\tau\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - Fo_2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi_2^2}\right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Fo_1} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_1^2} = 0 \qquad\qquad \text{mit}\ \ \partial\tau = \frac{L_1^2}{a}\,\partial Fo_1$$

Anfangsbedingung $t(\tau = 0) = t_0$

Randbedingungen

$$\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_W = \alpha_1 (t_U - t_W) \qquad \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_W = \alpha_2 (t_U - t_W)$$

dimensionslose Randbedingung

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 L_1}{\lambda} \quad , \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 L_2}{\lambda}$$

Einsetzen

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} + Bi_1 \vartheta \right)_{\xi_1 = 1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_2} + Bi_2 \vartheta \right)_{\xi_2 = 1} = 0$$

dimensionslose Anfangsbedingung

$$\vartheta(Fo_1 = 0) = 1 \quad , \quad \vartheta(Fo_2 = 0) = 1$$

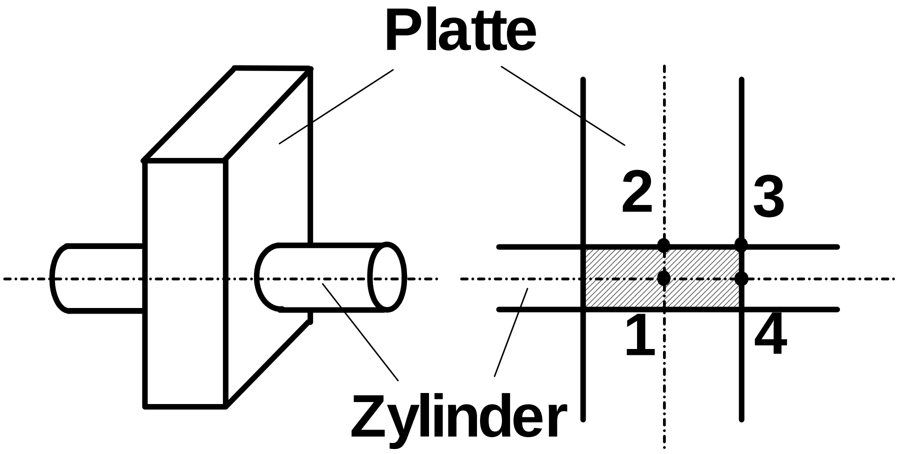
Einführen des Lösungsansatzes

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + Bi_1 \Phi \right)_{\xi_1 = 1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} + Bi_2 \Psi \right)_{\xi_2 = 1} = 0$$

$$\Phi(\tau = 0) = 1 \qquad \Psi(\tau = 0) = 1$$

Ergebnis (Überlagerung der 2 Einzellösungen)

$$\boxed{\vartheta(Fo, Bi, \xi) = \vartheta(Fo_1, Bi_1, \xi_1)\ \vartheta(Fo_2, Bi_2, \xi_2) = \vartheta_1\ \vartheta_2}$$



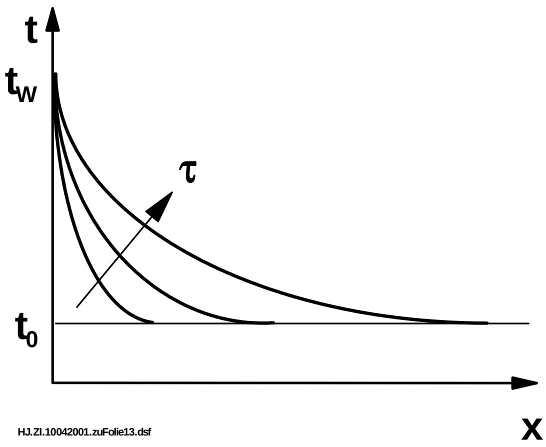
Kerntemperatur $$\vartheta_1^{EZ} = \vartheta_K^{Pl}\ \vartheta_K^{Z}$$

Oberflächentemperatur $$\vartheta_2^{EZ} = \vartheta_K^{Pl}\ \vartheta_W^{Z}$$

Ecktemperatur $$\vartheta_3^{EZ} = \vartheta_W^{Pl}\ \vartheta_W^{Z}$$

Oberflächentemperatur $$\vartheta_4^{EZ} = \vartheta_W^{Pl}\ \vartheta_K^{Z}$$

Überlagerung von Platte und Zylinder	Wärmeübertragung



gl. $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$

neue Var . $\sqrt{4 a \tau}$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)_x = -\frac{x\,\tau^{-3/2}}{2\sqrt{4a}} = -\frac{\eta}{2\tau} \quad \rightarrow \quad \partial\tau = -\frac{2\tau}{\eta}\,\partial\eta \quad , \quad \partial x = \sqrt{4\,a\,\tau}\;\partial\eta$$

neue Dgl. $\frac{d^2 t}{d\eta^2} + 2\eta \, \frac{dt}{d\eta} = 0$

Lösungsansatz $t = A + B' \int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$

allgemeine Lösung $t = A + B \, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$

Gausssches Fehlerintegral

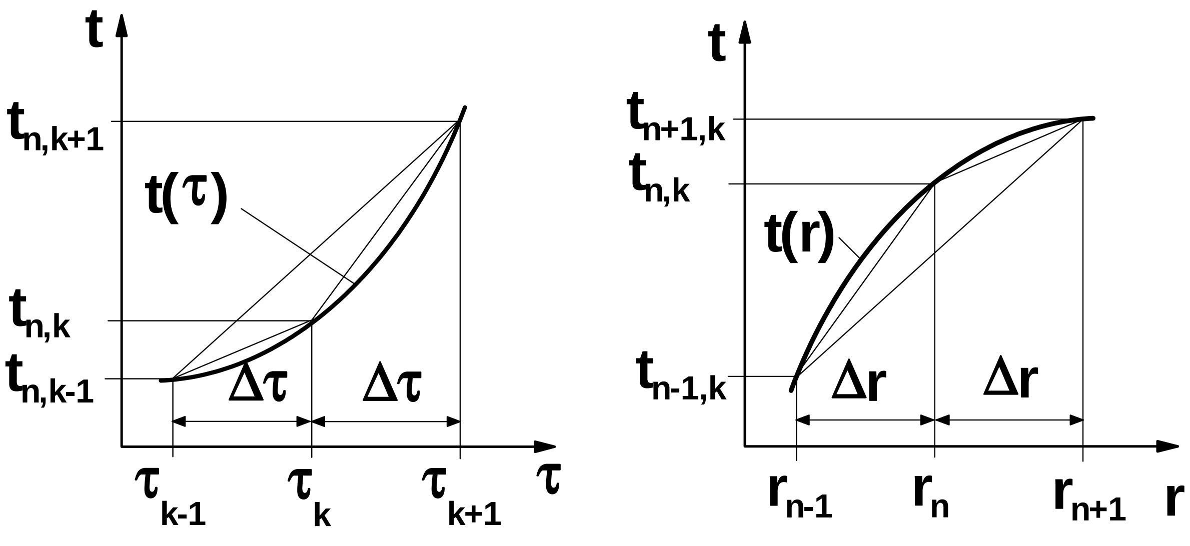
(error-function) $\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$

Anfangsbedingung $t(\tau = 0, x) = t_0$ $A = t_W$

Randbedingung $t(x = 0, \tau > 0) = t_W$ $B = t_0 - t_W$

spez. Lösung $\boxed{\vartheta = \frac{t - t_W}{t_0 - t_W} = \operatorname{erf}(\eta)}$

Unendlich ausgedehnte ebene Wand	Wärmeübertragung



Dgl. $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}_i}{\rho c}$$

Umwandlung in Differenzengleichung

zeitlicher Differenzenquotient

vorderer $$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau}$$

mittlerer $$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{n,k+1} - t_{n,k-1}}{2 \Delta \tau}$$

hinterer $$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{n,k} - t_{n,k-1}}{\Delta \tau}$$

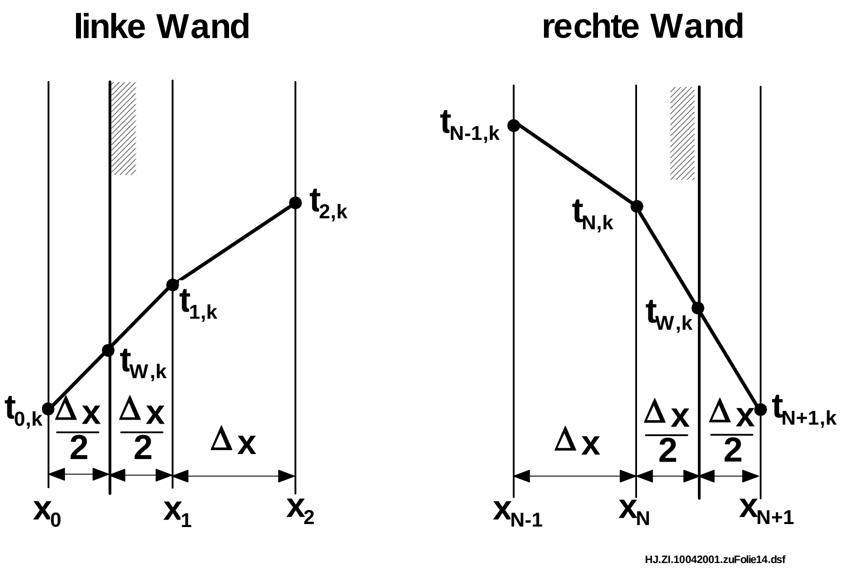
örtlicher Differenzenquotient

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_\tau \approx \frac{\Delta_\tau (\Delta_\tau t)}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_\tau (\Delta_\tau t) = \left(t_{n+1,k} - t_{n,k}\right) - \left(t_{n,k} - t_{n-1,k}\right)$$

Differenzengleichung

$$\boxed{\frac{\Delta_x t}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta_\tau (\Delta_\tau t)}{\Delta x^2} + \frac{\tilde{\dot{q}}_i}{\rho c}}$$



Randbedingung 1. Art ($t_{W,k}$ gegeben)

$$t_{0,k} = 2\,t_{W,k} - t_{1,k} \qquad\qquad t_{N+1,k} = 2\,t_{W,k} - t_{N,k}$$

Randbedingung 2. Art ($\hat{\dot{q}}_{W,k}$ gegeben)

$$\hat{\dot{q}}_{W,k} = -\lambda\,\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$t_{0,k} = t_{1,k} + \frac{\hat{\dot{q}}_{W,k}\,\Delta x}{\lambda} \quad , \quad t_{N+1,k} = t_{N,k} + \frac{\hat{\dot{q}}_{W,k}\,\Delta x}{\lambda}$$

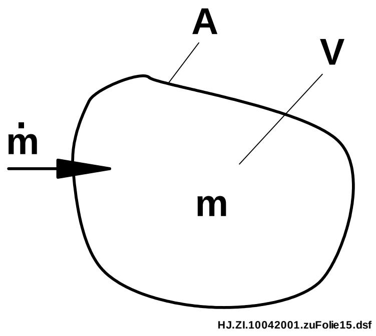
Randbedingung 3. Art (α_k und $t_{U,k}$ vorgegeben)

$$-\lambda\,\frac{t_{1,k} - t_{0,k}}{\Delta x} = \alpha\left(t_{U,k} - t_{W,k}\right)$$

$$t_{W,k} = 0{,}5\;(t_{0,k} + t_{1,k}) \quad , \quad Bi_k^+ = \frac{\alpha_k\,\Delta x}{\lambda}$$

$$t_{0,k} = t_{1,k} + \frac{t_{U,k} - t_{1,k}}{\frac{1}{Bi_k^+} + \frac{1}{2}} \quad , \quad t_{N+1,k} = t_{N,k} + \frac{t_{U,k} - t_{N,k}}{\frac{1}{Bi_k^+} + \frac{1}{2}}$$

Randbedingungen bei Differenzenverfahren	Wärmeübertragung



Massebilanz $$\frac{dm}{d\tau} = \dot{m}$$

zeitliche Änderung der Masse im Volumen

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau}\, dV$$

Massestrom über Oberfläche

$$\dot{m} = -\int_A \vec{\dot{m}}\, d\vec{A} = -\int_A \rho\, \vec{w}\, d\vec{A} = -\int_V \operatorname{div}(\rho\, \vec{w})\, dV$$

Gaußscher Integralsatz

Einsetzen

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho\, \vec{w}) \right) dV = 0$$

Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho\, \vec{w}) = 0}$$

Vereinfachungen

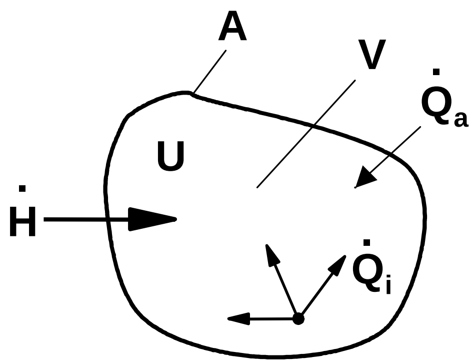
stationäre Strömung $\operatorname{div}(\rho\, \vec{w}) = 0$

inkompressible Strömung $\operatorname{div}(\vec{w}) = 0$

Energiebilanz $\quad \dfrac{dU}{d\tau} = \dot{Q}_a + \dot{H} + \dot{Q}_i$

innere Energie des Volumenelementes

$$U = \int_V \rho \; c \; t \; dV$$



HJ.ZI.10042001.zuFolie16.dsf

Wärmestrom über Oberfläche

$$\dot{Q}_a = \int_V \mathrm{div}\left(\lambda \; \mathrm{grad} \; t\right) dV$$

Wärmequelle im Volumenelement

$$\dot{Q}_i = \int_V \tilde{\dot{q}}_i \; dV$$

Enthalpiestrom über Oberfläche

$$\dot{H} = \dot{m} \; c \; t = -\int_A \rho \; \vec{w} \; c \; t \; d\vec{A} = -\int_V \mathrm{div}\left(\rho \; \vec{w} \; c \; t\right) dV$$

Umformen

$$\mathrm{div}\left(\rho \; \vec{w} \; c \; t\right) = c \; t \; \mathrm{div}\left(\rho \; \vec{w}\right) + \rho \; \vec{w} \; \mathrm{grad}\,(c \; t)$$

$$\frac{\partial\left(\rho \, c \, t\right)}{\partial\tau} = c \; t \; \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \rho \; \frac{\partial\left(c \; t\right)}{\partial \tau}$$

Energietransportgleichung (konstante Stoffwerte)

$$\boxed{\rho \; c \; \frac{\partial t}{\partial\tau} + \rho \; \vec{w} \; c \; \mathrm{grad} \; t = \lambda \; \mathrm{div}\,\mathrm{grad} \; t + \tilde{\dot{q}}_i}$$

zweidimensionaler stationärer Fall ohne Wärmequellen

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \; , \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Annahmen: stationär, konstante Stoffwerte, $\tilde{q}_i = 0$, 2-dimensional

Kontinuitätsgl. $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$

Bewegungsgl. (in x-Richtung) $\left(\partial p / \partial x = 0\right)$

$$\frac{d w_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \vec{w}\ \mathrm{grad}\ w_x$$

freie Konvektion an senkrechter beheizter Platte

$$w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial w_x'}{\partial y'} = -\, g_x'\ ß'\ \Delta t' + \nu' \frac{\partial^2 w_x'}{\partial y'^2}$$

Energietransportgleichung

$$w_x' \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial t'}{\partial y'} = a' \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2}$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha' \Delta t' = -\lambda' \left(\frac{\partial t'}{\partial n'}\right)_w$$

Maßstabsfaktoren

Länge $f_l = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{l'}{l}$

Zähigkeit $f_\nu = \frac{\nu'}{\nu}$

Geschwindigkeit $f_w = \frac{w_x'}{w_x} = \frac{w_y'}{w_y}$

Temperaturleitfähigkeit $f_a = \frac{a'}{a}$

Temperatur $f_t = \frac{t'}{t} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}$

Wärmeübergangskoeff. $f_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}$

therm. Ausdehnung $f_\beta = \frac{\beta'}{\beta}$

Wärmeleitkoeffizient $f_\lambda = \frac{\lambda'}{\lambda}$

Gravitationskonstante $f_g = \frac{g'}{g}$

Einsetzen der Maßstabsfaktoren

$$\frac{f_W}{f_l}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{f_w^2}{f_l}\left(w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=-f_g\ f_\beta\ f_t\ g_x\,\beta\,\Delta t+\frac{f_\nu\,f_W}{f_l^2}\ \nu\ \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{f_w\ f_t}{f_l}\left(w_x\frac{\partial t}{\partial x}+w_y\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{f_a\ f_t}{f_l^2}\ a\ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$f_\alpha\,\alpha=-\frac{f_\lambda}{f_l}\ \lambda\ \frac{\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_W}{\Delta t}$$

Bedingung für Maßstabsfaktoren

$$\frac{f_w^2}{f_l}=f_g\ f_\beta\ f_t=\frac{f_\nu\,f_W}{f_l^2}$$

$$\frac{f_w\ f_t}{f_l}=\frac{f_a\ f_t}{f_l^2}$$

$$f_\alpha=\frac{f_\lambda}{f_l}$$

Bedingung für physikalische Ähnlichkeit

$$\frac{g\ ß\ t\ l}{w^2}=\frac{g'\beta't'\ l'}{w'^2}=Ar$$

Kennzahlgleichungen im Umdruck

4.2.2 Freie Konvektion

a) freie Konvektion ohne Begrenzung
(Umströmung von Platten, Rohren, Kugeln)

b) freie Konvektion mit Begrenzung
(Zirkulationsströmung in Spalten)

4.2.3 Erzwungene Konvektion

a) längs angeströmte Platte
laminar bei t_W = const oder $\dot{q}_W$ = const,
turbulent (vollständig oder mit laminarem Anlauf)

b) Strömung durch Rohre
laminar (t_W = const oder $\dot{q}_W$ = const, gleichzeitiger Einlauf
oder thermischer Einlauf bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung)

turbulent

c) Strömung durch Kanäle
laminar (besondere Gln.) oder turbulent (mit d_{gl})

d) Strömung um Zylinder

e) Strömung um beliebig geformte Einzelkörper (mit $l_{Ü}$)

f) Strömung durch Rohrbündel

4.2.4 gemischte Konvektion

4.3.1 Kondensation

(Filmkondensation, laminar, turbulent, ruhender oder bewegter Dampf)

4.3.2 Verdampfung

(Blasensieden, in Behältern, bei Rohrströmung)

Überblick zu Kennzahlgleichungen	Wärmeübertragung

Beispiel: stationäre, laminare, inkompressible Strömung über Platte

1. Einflussgrößen

$$w, \quad l, \quad \lambda, \quad \rho, \quad c_p, \quad \eta, \quad \alpha \quad (7\,\text{Größen})$$

2. Einheiten

$$[w] = 1\ \mathrm{m/s}, \quad [l] = 1\ \mathrm{m}, \quad [\lambda] = 1\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} = 1\ \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{K\ s^3}}, \ \ldots$$

4 Grundeinheiten: $\mathrm{m}, \quad \mathrm{kg}, \quad \mathrm{s}, \quad \mathrm{K}$

3. Produktansatz

$$X = w^{x_1}\ l^{x_2}\ \lambda^{x_3}\ \rho^{x_4}\ c_p^{x_5}\ \eta^{x_6}\ \alpha^{x_7}$$

$$1 = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{x_1}\ \mathrm{m}^{x_2}\ \left(\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{K\ s^3}}\right)^{x_3}\ \ldots$$

4. Gleichung für jede Einheit aufstellen

$$\text{für m}: \ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = 0$$

7 Unbekannte und 4 Gln. à 3 X_i frei wählen

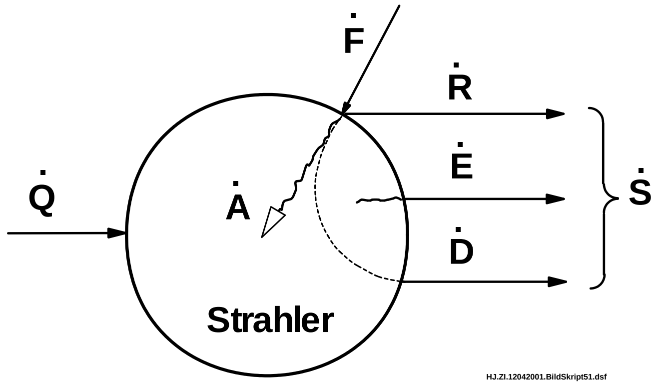
5. Lösung des Gleichungssystems

$$X = w^{x_1}\ l^{x_1 + x_7}\ \lambda^{-x_5 - x_7}\ \rho^{x_1}\ c_p^{x_5}\ \eta^{-x_1 + x_5}\ \alpha^{x_7}$$

$$x_1 = 1, \quad x_5 = x_7 = 0: \qquad \mathrm{Re} = \frac{w\ l\ \rho}{\eta} = \frac{w\ l}{\nu}$$

$$x_5 = 1, \quad x_1 = x_7 = 0: \qquad \mathrm{Pr} = \frac{c_p\ \eta}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

$$x_7 = 1, \quad x_1 = x_5 = 0: \qquad \mathrm{Nu} = \frac{\alpha\ l}{\lambda}$$



A	Absorption
D	Transmission
E	Emission
F	Einfallen
R	Reflexion
S	Aussenden

Energiebilanz für Körper $\qquad \dot{Q} + \dot{F} - \dot{S} = 0$

ausgesendeter Strahlungsenergiestrom $\qquad \dot{S} = \dot{R} + \dot{E} + \dot{D}$

Bilanz für einfallenden Energiestrom $\qquad \dot{F} = \dot{R} + \dot{A} + \dot{D}$

Einsetzen $\qquad \dot{Q} = \dot{E} - \dot{A}$

Strahlungsgleichgewicht $\left(\dot{Q} = 0\right)$ $\qquad \dot{F} = \dot{S}$ bzw. $\boxed{\dot{A} = \dot{E}}$

dimensionslose Form der Bilanz für einfallenden Energiestrom

$$\boxed{\rho + \alpha + \tau = 1}$$

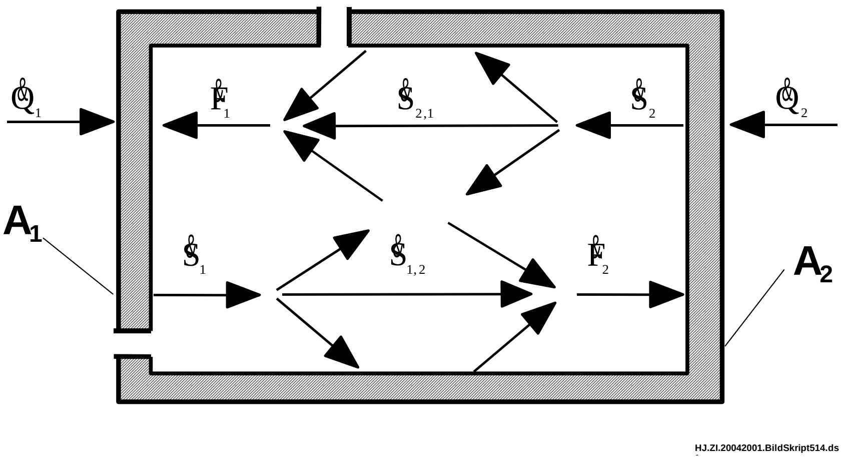
bzw.

$$\boxed{\rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda = 1}$$

Reflexionsgrad $\qquad \rho = \dot{R} / \dot{F}$

Absorptionsgrad $\qquad \alpha = \dot{A} / \dot{F}$

Transmissionsgrad $\qquad \tau = D / \dot{F}$



Strahlungsaustausch zwischen 2 einen Raum völlig umschließenden Flächen

Energiebilanz für Körper 1

$$\dot{Q}_1 = \dot{S}_1 - \dot{F}_1$$

von 1 ausgesendeter Strahlungsenergiestrom

$$\dot{S}_1 = \dot{E}_1 + \dot{R}_1 = \dot{E}_1 + \rho \dot{F}_1 = \dot{E}_1 + (1 - \varepsilon_1)\, \dot{F}_1$$

Eliminierung von $\dot{F}_1$

$$\dot{Q}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \varepsilon_1 \dot{S}_1}{1 - \varepsilon_1} = A_1 \frac{\hat{\dot{e}}_1 - \varepsilon_1 \hat{\dot{s}}_1}{1 - \varepsilon_1} = A_1 \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \left[C_S \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \hat{\dot{s}}_1 \right] \quad (1)$$

analog Körper 2

$$\dot{Q}_2 = A_2 \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} \left[C_S \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \hat{\dot{s}}_2 \right] \quad (2)$$

übertragener Wärmestrom durch Transmission

$$\dot{Q}_{\tau,1,2} = \dot{S}_{1,2} - \dot{S}_{2,1} = \varphi_{1,2} \dot{S}_1 - \varphi_{2,1} \dot{S}_2 = \varphi_{1,2} A_1 \hat{\dot{s}}_1 - \varphi_{2,1} A_2 \hat{\dot{s}}_2$$

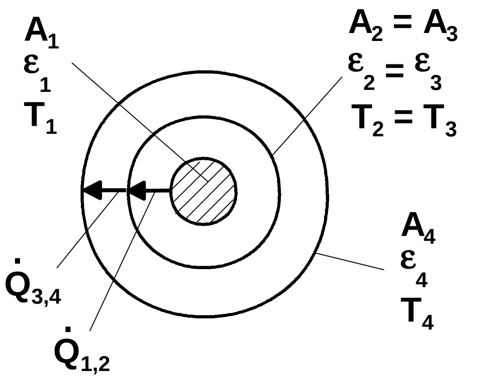
$$\dot{Q}_{\tau,1,2} = \varphi_{1,2} A_1 \left(\hat{\dot{s}}_1 - \hat{\dot{s}}_2 \right) \quad (3) \qquad (\text{mit } \varphi_{1,2} A_1 = \varphi_{2,1} A_2)$$

Energiebilanz für Gesamtsystem

$$\dot{Q}_1 = - \dot{Q}_2 \quad (4) \qquad \dot{Q}_1 = \dot{Q}_{\tau,1,2} \quad (5)$$

Lösung der Gln. (1) bis (5)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{\tau,1,2} &= \dot{Q}_{1,2} = C_{1,2} A_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \\ C_{1,2} &= \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{\varphi_{1,2}} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}} \end{aligned}}$$



HJ.ZI.26042001.BildSkript516.ds

Annahmen: Strahlungsschirm sehr dünn

$$A_2 = A_3 \ , \ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ , \ T_2 = T_3$$

Energiebilanz für Strahlungsschirm

$$\dot{Q}_{1,2} = \dot{Q}_{3,4}$$

Wärmestrom von Innen zu Strahlungsschirm

$$\dot{Q}_{1,2} = C_{1,2} \ A_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

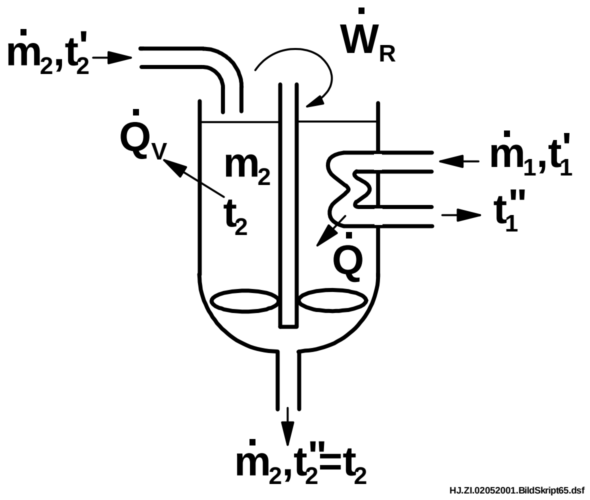
$$C_{1,2} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}}$$

Wärmestrom vom Strahlungsschirm nach Außen

$$\dot{Q}_{3,4} = C_{3,4} \ A_3 \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_4}{100} \right)^4 \right] \quad , \quad C_{3,4} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \left(\frac{1}{\varepsilon_4} - 1 \right) \frac{A_3}{A_4}}$$

Eliminierung von T_2 bzw. T_3

$$\boxed{\begin{gathered} \dot{Q}_{1,4} = C_{1,4} \ A_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_4}{100} \right)^4 \right] \\ C_{1,4} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_4} - 1 \right) \frac{A_1}{A_4} + \left(\frac{2}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}} \end{gathered}}$$



Energiebilanz für Behälterinhalt (für $\dot{m}_2 = 0$)

$$\frac{dU_2}{d\tau} = \frac{dH_2}{d\tau} = \dot{Q} - \dot{Q}_V + \dot{W}_R$$

Änderung des Energieinhaltes des Behälterinhaltes

$$dH_2 = m_2\ c_{p_2}\ dt_2$$

Heizwärmestrom (Annahme t_1 = const)

$$\dot{Q} = k\ A\ (t_1 - t_2)$$

Annahme: $\dot{Q}_V = 0$, $\dot{W}_R = 0$

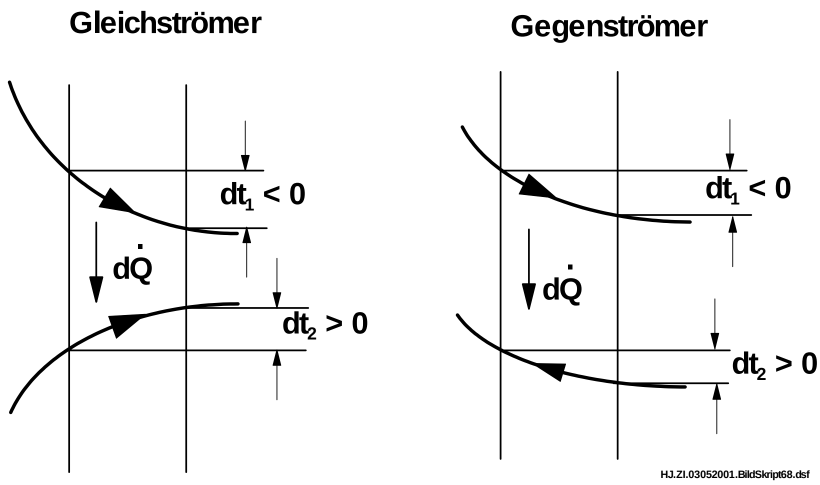
T.d.V. und Integration

$$m_2\, c_{p_2} \int_{t_{2,0}}^{t_2} \frac{dt_2}{t_1 - t_2} = k\ A \int_0^{\tau} d\tau$$

Temperaturänderung für Behälterinhalt

$$\boxed{t_2(\tau) = t_1 - (t_1 - t_{2,0}) \exp\left(- \frac{k\ A}{m_2\ c_{p_2}}\ \tau \right)}$$

Rührkessel	Wärmeübertragung



Energiebilanz für Heizflächenelement da (Gl, Geg)

$$d\dot Q = -\,\dot W_1\,dt_1 = \pm\,\dot W_2\,dt_2 = k\,(t_1 - t_2)\,da$$

Umformung

$$dt_1 = -\frac{k\,(t_1 - t_2)\,da}{\dot W_1}\,, \qquad dt_2 = \pm\frac{k\,(t_1 - t_2)\,da}{\dot W_2}$$

$$d(t_1 - t_2) = -\,k\,(t_1 - t_2)\left(\frac{1}{\dot W_1} \pm \frac{1}{\dot W_2}\right)da$$

$$\Delta t = t_1 - t_2\,, \quad \omega = \frac{1}{\dot W_1} \pm \frac{1}{\dot W_2}$$

Integration

$$\int_{\Delta t_0}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -\int_0^a \omega\,k\,da \quad \rightarrow \quad \ln\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = -\,\omega\,k\,a$$

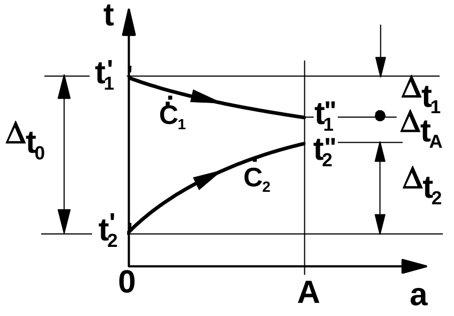
$$\Delta t = \Delta t_0\,\exp(-\omega\,k\,a) \qquad\qquad \Delta t_A = \Delta t_0\,\exp(-\,\omega\,k\,A)$$

mittlere Temperaturdifferenz

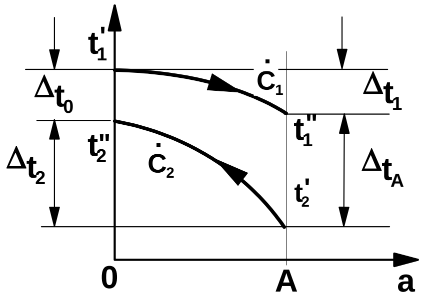
$$\Delta t_m = \frac{1}{A}\int_0^A \Delta t\;da = \frac{\Delta t_0}{A}\,\frac{1}{\underbrace{-\,\omega k}_{\ln\,\Delta t_A/\Delta t_0}}\left(\underbrace{\exp(-\,\omega\,k\,A)}_{\Delta t_A/\Delta t_0} - 1\right)$$

$$\boxed{\Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{\ln\dfrac{\Delta t_A}{\Delta t_0}}}$$

a) Gleichströmer



b) Gegenströmer



Temperatur-Heizflächen-Schaubild

HJ.Zl.26042001.BildSkript67.dsf

Gesucht $\Phi_1(R_1, N_1)$ für Gl und Geg

Ausgangsgleichungen

$$\Phi_1 = \frac{\dot{Q}}{\dot{C}_1\,\Delta t_{max}} = \frac{k\,A\,\Delta t_m}{\dot{C}_1\,\Delta t_{max}} = N_1\,\frac{1-\dfrac{\Delta t_A}{\Delta t_0}}{\ln\dfrac{\Delta t_0}{\Delta t_A}}\,\frac{\Delta t_0}{\Delta t_{max}}$$

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{\ln(\Delta t_A/\Delta t_0)} = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{\ln(\Delta t_0/\Delta t_A)}$$

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_0} = \exp(-\omega\,k\,A) = \exp\left(-\left(1 \pm R_1\right)N_1\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\dot{C}_1} \pm \frac{1}{\dot{C}_2} = \left(1 \pm \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right)\frac{1}{\dot{C}_1}$$

Gleichströmer $\qquad \dfrac{\Delta t_0}{\Delta t_{max}} = 1$

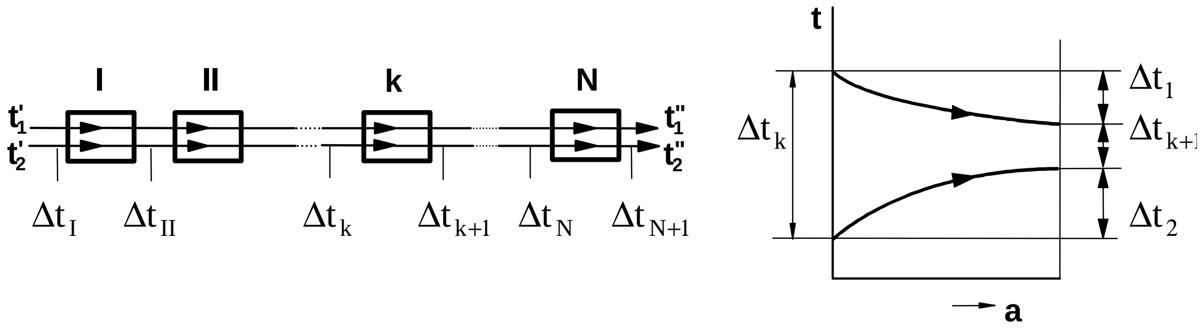
Gegenströmer $\qquad \dfrac{\Delta t_0}{\Delta t_{max}} = \dfrac{\Delta t_{max} - \Delta t_2}{\Delta t_{max}} = 1 - \Phi_2 = 1 - R_1\,\Phi_1$

Einsetzen

Gleichströmer $\qquad \Phi_1 = \dfrac{1-\exp\left(-\left(1+R_1\right)N_1\right)}{1+R_1}$

Gegenströmer $\qquad \Phi_1 = \dfrac{1-\exp\left(-\left(1-R_1\right)N_1\right)}{1-R_1\,\exp(-(1-R_1)N_1)}$

Sonderfall für Gegenströmer bei $R_1 = 1 \qquad \Phi_1 = \dfrac{N_1}{1+N_1}$



HJ.ZI.04052001.BildSkript618.ds

Annahme: Gleichsinnschaltung, $\dot{C}_1$ und $\dot{C}_2$ konstant, N Gleichströmer

Temperaturdifferenz zwischen den beiden Strömen

$$\frac{\Delta t_I}{\Delta t_{II}} \frac{\Delta t_{II}}{\Delta t_{III}} \cdots \frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k+1}} \cdots \frac{\Delta t_N}{\Delta t_{N+1}} = \prod_{k=I}^{N} \frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k+1}} = \frac{\Delta t_I}{\Delta t_{N+1}}$$

Temperaturverhältnis für einen Rekuperator

$$\frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k+1}} = \underbrace{\frac{\Delta t_k}{\Delta t_{max,k}}}_{=1} \frac{\Delta t_{max,k}}{\Delta t_{k+1}} = \frac{1}{1-\Phi_{1,k}\ (1+R_{1,k})}$$

$$\frac{\Delta t_{k+1}}{\Delta t_{max}} = \frac{\Delta t_{max,k} - \Delta t_{1,k} - \Delta t_{2,k}}{\Delta t_{max,k}} = 1 - \Phi_{1,k} - R_{1,k}\ \Phi_{1,k}$$

Temperaturverhältnis für gesamte Anordnung

$$\frac{\Delta t_I}{\Delta t_{N+1}} = \frac{1}{1-\Phi_{1,GLS}\ (1+R_1)}$$

Einsetzen ($R_{1,k}$ = const)

$$\boxed{\Phi_{1,GlS} = \frac{1-\prod_{k=I}^{N}\left(1-\Phi_{1,k}\left(1+R_1\right)\right)}{1+R_1}}$$

Gegensinnschaltung

$$\boxed{\Phi_{1,GegS} = 1 - \frac{R_1 - 1}{R_1 - \prod_{k=I}^{N} \frac{1-R_1\ \Phi_{1,k}}{1-\Phi_{1,k}}}}$$

Gegeben: Gleichströmer $R_1 = 1$, $\Phi_{1,I} = 0{,}4$

Gegenströmer $R_1 = 1$, $\Phi_{1,II} = 0{,}6$

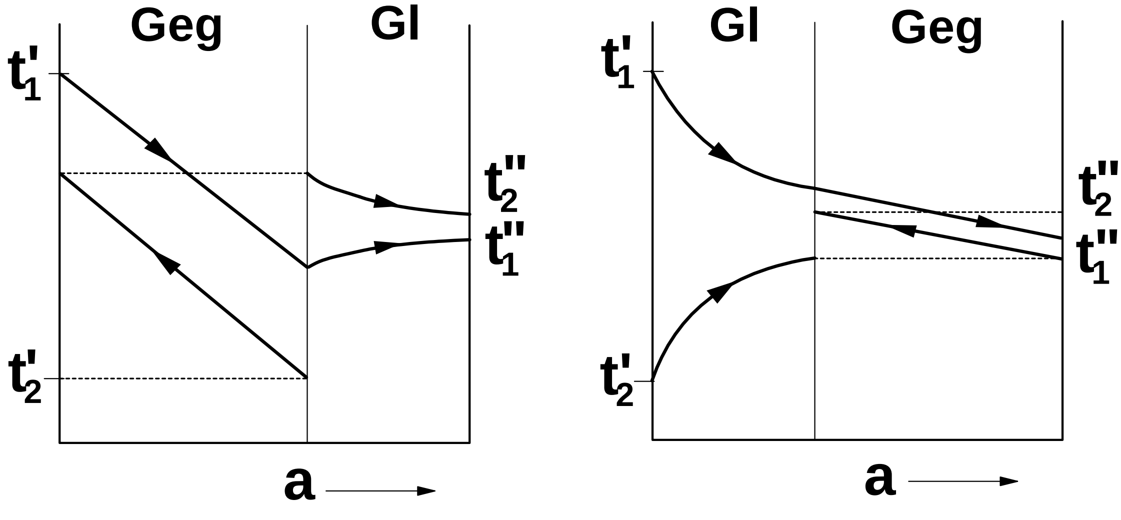
Gleichsinnschaltung

Gesucht: $\Phi_{1,GlS}$

$$\Phi_{1,GlS} = \frac{1 - \prod_{k=I}^{II}\left(1 - \Phi_{1,k}\left(1 + R_1\right)\right)}{1 + R_1}$$

$$= \frac{1 - \left(1 - 0{,}4 \cdot 2\right)\left(1 - 0{,}6 \cdot 2\right)}{2} = 0{,}52$$

$$\Phi_{1,GlS} < \Phi_{1,II}$$



HJ.Zl.25042001.zuFolie616.dsf.