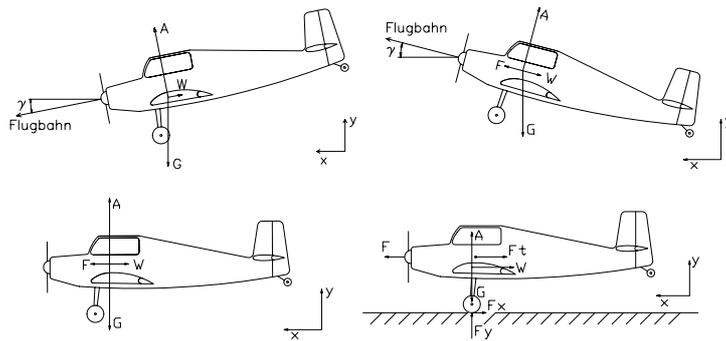


Aufgabensammlung

Flugmechanik / Aerodynamik

Institut für Luft- und Raumfahrttechnik

Technische Universität Dresden



Klaus-Peter Neitzke

1999

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Symbole	1
1 Der Start	2
2 Der Steigflug	7
3 Der Geradeausflug	12
4 Der Gleitflug	19
5 Der Kurvenflug	24
6 Der Luftraum	29
7 Der Reiseflug bei verschiedenen Flughöhen	34
8 Der induzierte Widerstand an einer Tragfläche	36
9 Übungen zum Nickmoment, Druckpunkt und Neutralpunkt	44
10 Die Flugstabilität einer einzelnen Tragfläche	48
11 Die Flugstabilität von zwei zusammenhängenden Flügeln	51
12 Die Potentialtheorie	57
13 Die Konforme Abbildung und die Joukowski-Profil	60
Literaturverzeichnis	60

Verzeichnis der Symbole

F	N	Schubkraft des Antriebes	
S	m ²	Flügelfläche	
m	kg	Masse	
c _A		Auftriebsbeiwert	
c _W		Widerstandsbeiwert	
c _M		Momentenbeiwert	
ρ	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Luftdichte	
g	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Erdbeschleunigung	
a	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Beschleunigung	
A	N	aerodynamischer Auftrieb	$A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A$
W	N	aerodynamischer Widerstand	$W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_W$
G	N	Gewichtskraft	$G = m \cdot g$
F _t	N	Trägheitskraft	$F_t = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
F _x	N	Reibkraft am Fahrwerk	$F_x = \mu \cdot F_y$
F _y	N	Auflagenkraft am Fahrwerk	
t	s	Zeit	
x, y	m	Koordinaten	
ξ, η	m	Koordinaten in der ξ-Ebene	
V	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Geschwindigkeit	
n		Lastvielfaches	
r	m	Radius	
b	m	Spannweite	
t	m	Flügeltiefe	
α	Grad	Anstellwinkel	
α ₀	Grad	Nullauftriebswinkel	
x _N	m	Koordinate des Neutralpunktes	

1 Der Start

Ein Flugzeug beschleunigt auf einer waagerechten Startbahn.

Aufgabe:

- a) Skizzieren Sie die Kräfte beim Start an einem Flugzeug!
Welche Kräfte treten bei diesem Vorgang auf?
- b) Wie lautet das Kräftegleichgewicht?
- c) Wie groß ist die mittlere Startbeschleunigung?
- d) Wie groß ist die Geschwindigkeit, bei der das Flugzeug abhebt?
- e) Wie lange dauert der Startvorgang?
- f) Welchen Weg legt das Flugzeug in dieser Zeit zurück?
- g) Berechnen Sie die Werte der Punkte c) bis f) unter Vernachlässigung der Radreibung und des aerodynamischen Widerstandes für das Beispiel:

Flugzeug 152 des Flugzeugwerkes Dresden (1. Start am 4.12.1958)

- Startschub $F = 4$ Triebwerke a 31.0 kN
- Flügelfläche $S = 138 \text{ m}^2$
- Startmasse $m_{\text{TO}} = 46500 \text{ kg}$
- Auftriebsbeiwert $c_A = 1.5$
- Luftdichte $\rho = 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

h) Berechnen Sie die Werte der Punkte c) bis f) unter Berücksichtigung der Radreibung und des aerodynamischen Widerstandes!

- Reibungsbeiwert $\mu = 0.03$
- Widerstandbeiwert $c_w = 0.05$

Hinweis: Die Aufgabe h) ist nicht analytisch lösbar. Dafür ist eine numerische Modellierung notwendig.

Lösungsweg:

a)

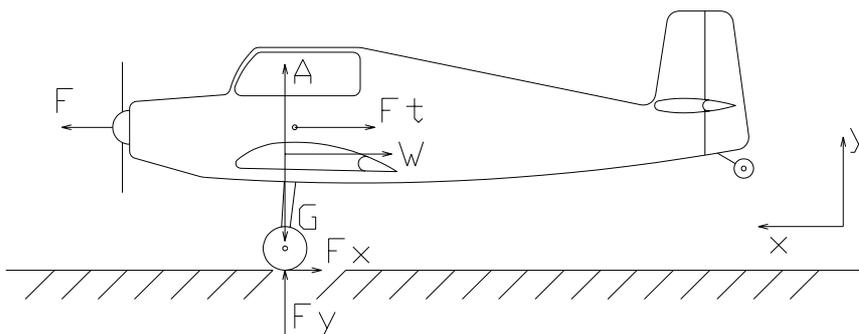


Bild 1.1: Darstellung des Flugzeuges beim Start mit den angreifenden Kräften

Folgende Kräfte treten auf:

$$\text{Schubkraft des Antriebes} \quad F = \text{const.} \quad (1.1)$$

$$\text{aerodynamischer Auftrieb} \quad A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A \quad (1.2)$$

$$\text{aerodynamischer Widerstand} \quad W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_w \quad (1.3)$$

$$\text{Gewichtskraft} \quad G = m \cdot g \quad (1.4)$$

$$\text{Trägheitskraft} \quad F_t = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Auflagenkraft am Fahrwerk} & \quad F_y \\ \text{Reibkraft am Fahrwerk} & \quad F_x = \mu \cdot F_y \end{aligned} \quad (1.6)$$

e) Die Berechnung der Zeit vom Stillstand bis zum Abheben wird mit der Bewegungsgleichung gelöst. Die Definition der Beschleunigung ist $a = \ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$. Die Integration führt zu $V = \dot{x} = a \cdot t + K$. Da zum Zeitpunkt 0 die Geschwindigkeit $V = 0$ ist, beträgt die Konstante $K = 0$. Daraus kann die Zeit bis zu Abheben berechnet werden.

$$t_{\text{Abh.}} = \frac{V_{\text{Abh.}}}{a} \quad (1.15)$$

f) Dafür wird die unter e) angegebene Gleichung $\dot{x} = a \cdot t$ nach der Zeit integriert. Als Ergebnis steht nach Bestimmung der Integrationskonstante die Startstrecke zur Verfügung.

$$x_{\text{Abh.}} = \frac{a}{2} t_{\text{Abh.}}^2 \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \text{g) } a &= 2.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ V_{\text{Abh.}} &= 59.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (= 214 \frac{\text{km}}{\text{h}}) \\ t_{\text{Abh.}} &= 22.3 \text{ s} \\ x_{\text{Abh.}} &= 661 \text{ m} \end{aligned}$$

In einer Übersicht des Flugzeuges 152 wird die Startrollstrecke mit 690 m angegeben. Die in der Tabelle ebenfalls enthaltene Landegeschwindigkeit von $200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liegt geringfügig unter der im Beispiel berechneten Abhebegeschwindigkeit.

h) Tabelle 1.1: Verlauf der einzelnen Größen beim Start

t / (s)	x / (m)	v / ($\frac{m}{s}$)	W / (N)	A / (N)	a / ($\frac{m}{s^2}$)	A / G	Ft / (N)	Fx / (N)
0	0,0	0,0	0	0	2,37	0,00	110315	13685
1	1,2	2,4	24	728	2,37	0,00	110313	13663
2	4,7	4,7	97	2912	2,37	0,01	110305	13598
3	10,7	7,1	218	6553	2,37	0,01	110293	13488
4	19,0	9,5	388	11648	2,37	0,03	110276	13335
5	29,7	11,9	607	18199	2,37	0,04	110254	13139
...								
10	118,6	23,7	2424	72723	2,37	0,16	110073	11503
...								
20	473,8	47,3	9656	289680	2,35	0,64	109349	4995
...								
24	681,9	56,7	13870	416104	2,34	0,91	108928	1202
25	739,8	59,1	15040	451189	2,34	0,99	108811	149
26	800,0	61,4	16255	487654	2,34	1,07	108690	-945

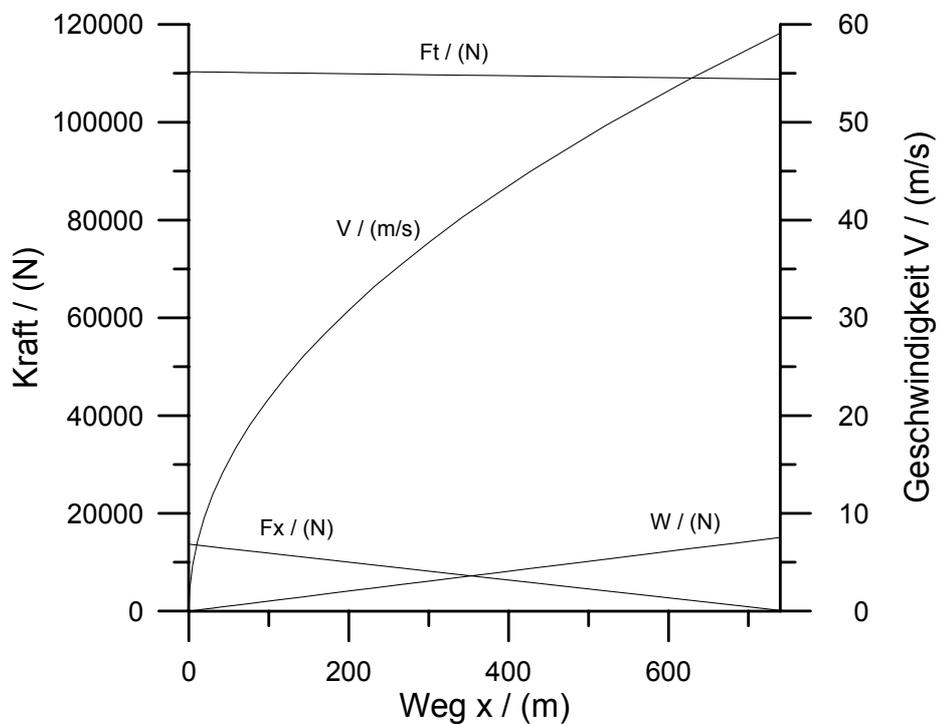


Bild 1.2: Darstellung der Kräfte und der Geschwindigkeit beim Start

2 Der Steigflug

Ein Flugzeug steigt mit einem Bahnwinkel γ mit konstanter Geschwindigkeit.
Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$.

Aufgabe:

- Skizzieren Sie die Kräfte beim Steigen an einem Flugzeug!
Welche Kräfte treten bei diesem Vorgang auf?
- Wie lautet das Kräftegleichgewicht?
- Leiten sie eine Gleichung zur Bestimmung des Bahnwinkels γ her!
- Bei welchem Auftriebsbeiwert ist der Bahnwinkels γ am größten?
- Skizzieren Sie den Bahnwinkel in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit für das folgende Beispiel! Wie groß ist dabei der notwendige Auftriebsbeiwert?

Flugzeug 152 des Flugzeugwerkes Dresden (1. Start am 4.12.1958)

- Schub	F	= 4 Triebwerke a 31.0 kN
- Flügelfläche	S	= 138 m ²
- Masse	m	= 46500 kg
- minimaler Widerstandsbeiwert	$c_{W_{\min}}$	= 0.02
- Konstante in der Approximation	K	= 0.004
- Luftdichte	ρ	= 1.25 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Erdbeschleunigung	g	= 9.81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lösungsweg:

a)

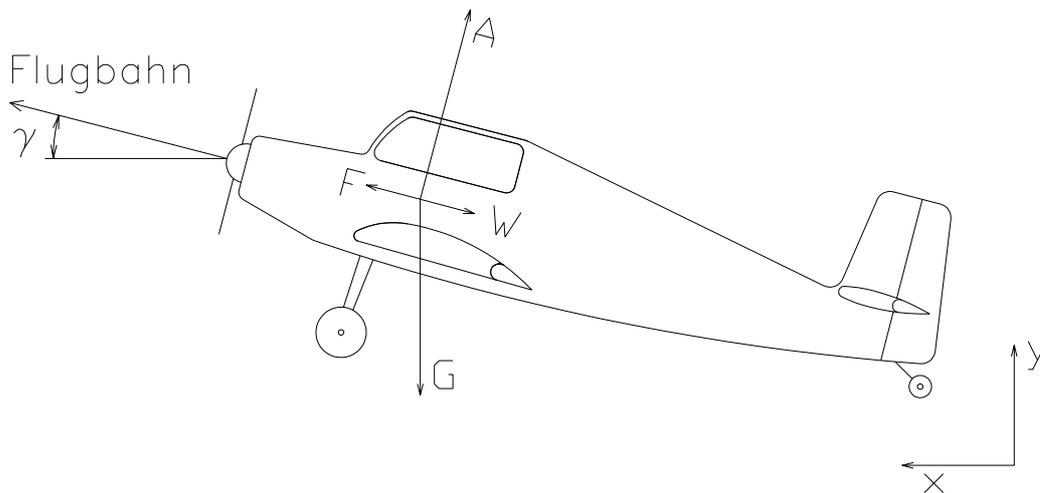


Bild 2.1: Darstellung des Flugzeuges beim Steigflug mit den angreifenden Kräften

Folgende Kräfte treten auf:

aerodynamischer Auftrieb $A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A$ (2.1)

aerodynamischer Widerstand $W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_W$ (2.2)

Gewichtskraft $G = m \cdot g$ (2.3)

Schubkraft des Antriebes $F = \frac{P}{V}$ (2.4)

b) Kräftegleichgewicht in: x-Richtung:

$$F \cdot \cos \gamma - A \cdot \sin \gamma - W \cdot \cos \gamma = 0 \quad (2.5)$$

y-Richtung:

$$A \cdot \cos \gamma + F \cdot \sin \gamma - G - W \cdot \sin \gamma = 0 \quad (2.6)$$

Richtung der Flugbahn:

$$F - W - G \cdot \sin \gamma = 0 \quad (2.7)$$

Richtung quer zur Flugbahn:

$$A - G \cdot \cos \gamma = 0 \quad (2.8)$$

c) Die Berechnung eines Bahnwinkels kann mit den Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.5 erfolgen. Werden sie ineinander eingesetzt erhält man eine Gleichung zu Berechnung des Bahnwinkels.

$$\gamma = \arctan \left(\frac{F}{\frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A} - \frac{c_W}{c_A} \right) \quad (2.9)$$

Für den Fall, daß kein Schub zur Verfügung steht ist der Bahnwinkel negativ und kann aus der Formel für den Gleitflug $\gamma = \arctan \left(-\frac{c_W}{c_A} \right)$ berechnet werden. Das

negative Vorzeichen ist durch den umgekehrten Richtungssinn zu erklären. Setzt man in die Gleichung 2.9 die die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$ ein, erhält man eine Gleichung für den Bahnwinkel, die nur noch von dem Auftriebsbeiwert abhängig ist.

$$\gamma = \arctan \left(\frac{F}{\frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A} - \frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A} \right) \quad (2.10)$$

Da der Auftriebsbeiwert und die Geschwindigkeit nicht unabhängig voneinander wählbar sind, muß der Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit angegeben werden. dafür werden die Gleichungen 2.1 und 2.6 benutzt. In Gleichung 2.6 werden durch eine Größenabschätzung zwei Summanden vernachlässigt.

Die Vereinfachung gilt aber nur für geringe Steigwinkel. Ergebnis dieser Betrachtung ist der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Auftriebsbeiwert.

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S \cdot c_A}} \quad (2.11)$$

Wird diese Geschwindigkeit in 2.10 eingesetzt steht damit eine Gleichung zur Berechnung des Bahnwinkels γ zur Verfügung.

$$\gamma = \arctan\left(\frac{F}{m \cdot g} - \frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A}\right) \quad (2.12)$$

Jetzt kann das c_A gesucht werden, bei dem der Bahnwinkel γ seinen größten Wert annimmt. Durch Differentiation und Auflösung nach c_A erhält man:

$$c_{A_{\text{best. Steig}}} = \sqrt{\frac{c_{W_{\min}}}{K}} \quad (2.13)$$

Den selben Wert benutzt man, um beim Gleiten ohne Antrieb den besten Gleitwinkel zu fliegen.

e) In Bild 2.2 ist der Bahnwinkel und der notwendige Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit dargestellt.

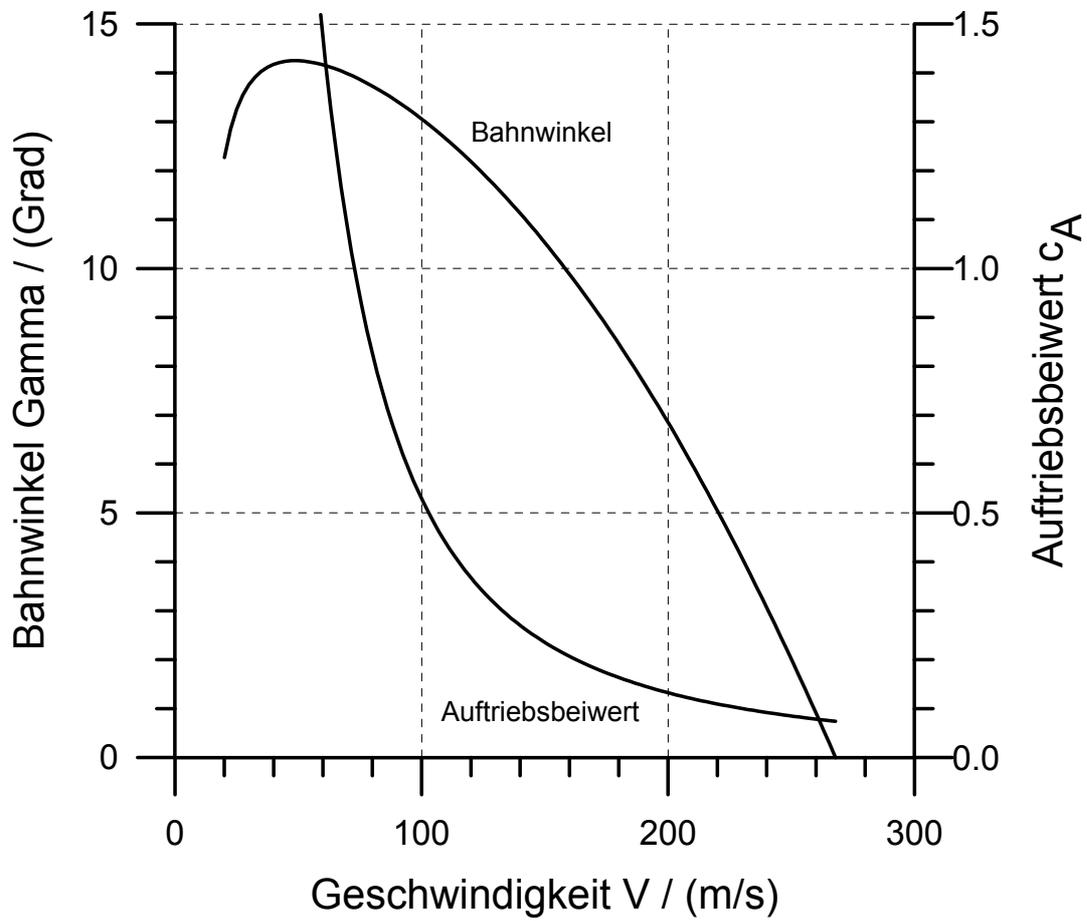


Bild 2.2: Darstellung des Bahnwinkels und des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit beim Steigflug

3 Der Geradeausflug

Aufgabe:

Ein Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit in einer konstanten Flughöhe.
Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$.

- a) Skizzieren Sie die Kräfte beim Geradeausflug an einem Flugzeug!
Welche Kräfte treten bei diesem Vorgang auf?
- b) Wie lautet das Kräftegleichgewicht?
- c) Wie groß muß die Schubleistung des Antriebes sein? Stellen sie die Schubleistung in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit graphisch dar!
- d) Mit welcher Geschwindigkeit muß das Flugzeug fliegen, damit die minimale Schubleistung erreicht wird?
- e) Mit welcher Geschwindigkeit muß das Flugzeug fliegen, damit die minimale Schubkraft erreicht wird?
- f) In welchem Geschwindigkeitsbereich gilt die Approximation der Polaren?
- g) Berechnen Sie die Unterpunkte c) bis f) für das folgende Beispiel:

Flugzeug 152 des Flugzeugwerkes Dresden (1. Start am 4.12.1958)

- Schub	F	= 4 Triebwerke a 31.0 kN
- Flügelfläche	S	= 138 m ²
- Masse	m	= 46500 kg
- minimaler Widerstandsbeiwert	$c_{W_{\min}}$	= 0.02
- Konstante in der Approximation	K	= 0.004
- Luftdichte	ρ	= 1.25 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

- Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lösungsweg:

a)

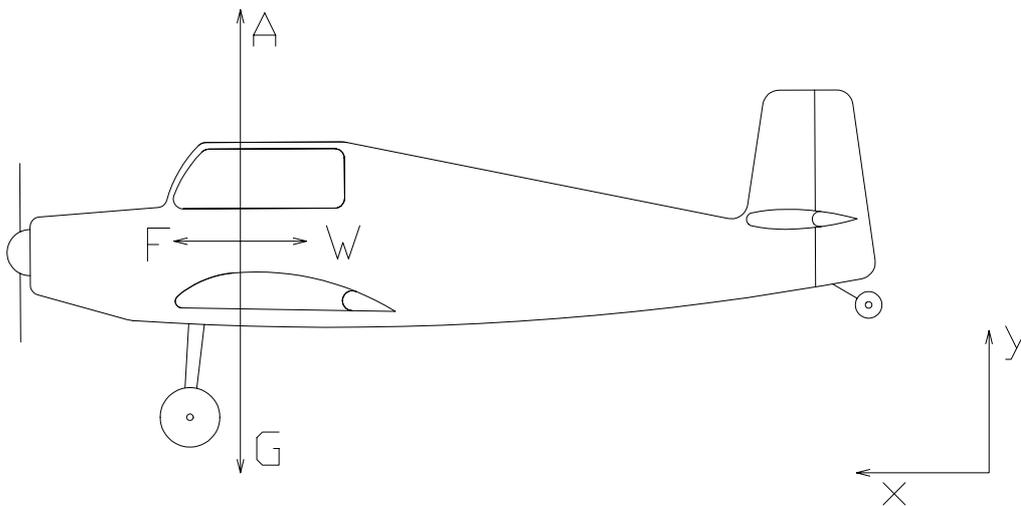


Bild 3.1: Darstellung des Flugzeuges im Geradeausflug mit den angreifenden Kräften

Folgende Kräfte treten auf:

aerodynamischer Auftrieb $A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A$ (3.1)

aerodynamischer Widerstand $W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_W$ (3.2)

Gewichtskraft $G = m \cdot g$ (3.3)

Schubkraft des Antriebes $F = \frac{P}{V}$ (3.4)

b) Kräftegleichgewicht in: x-Richtung: $F - W = 0$ (3.5)

y-Richtung: $A - G = 0$ (3.6)

c) Für die Berechnung der erforderlichen Schubleistung wird die Formel 3.2, 3.4 und 3.5 verwendet. Die drei Formeln können zu

$$P = \frac{\rho}{2} V^3 \cdot S \cdot c_w \quad (3.7)$$

zusammengefasst werden. In der Gleichung 3.7 muß jetzt der Widerstandbeiwert durch die Approximation $c_w = c_{w_{\min}} + K \cdot c_A^2$ ersetzt werden. Weiterhin wird der Auftriebsbeiwert in der Approximation mit Hilfe der Gleichungen 3.1, 3.3 und 3.6 ersetzt.

$$c_A = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot V^2 \cdot S} \quad (3.8)$$

Fasst man 3.7, die Approximation und 3.8 zusammen erhält man für die Schubleistung folgenden Ausdruck:

$$P = \frac{\rho}{2} V^3 \cdot S \cdot c_{w_{\min}} + \frac{2 \cdot K \cdot m^2 \cdot g^2}{\rho \cdot V \cdot S} \quad (3.9)$$

Die erforderliche Schubleistung setzt sich damit aus zwei Summanden zusammen, siehe Bild 3.2. Der erste Anteil ist eine Parabel dritter Ordnung. Darin steigt die erforderliche Leistung mit der dritten Potenz in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Der zweite Summand ist eine Hyperbel. Dieser hat zur Folge, daß der Leistungsbedarf bei kleinen Geschwindigkeiten sehr hoch wird.

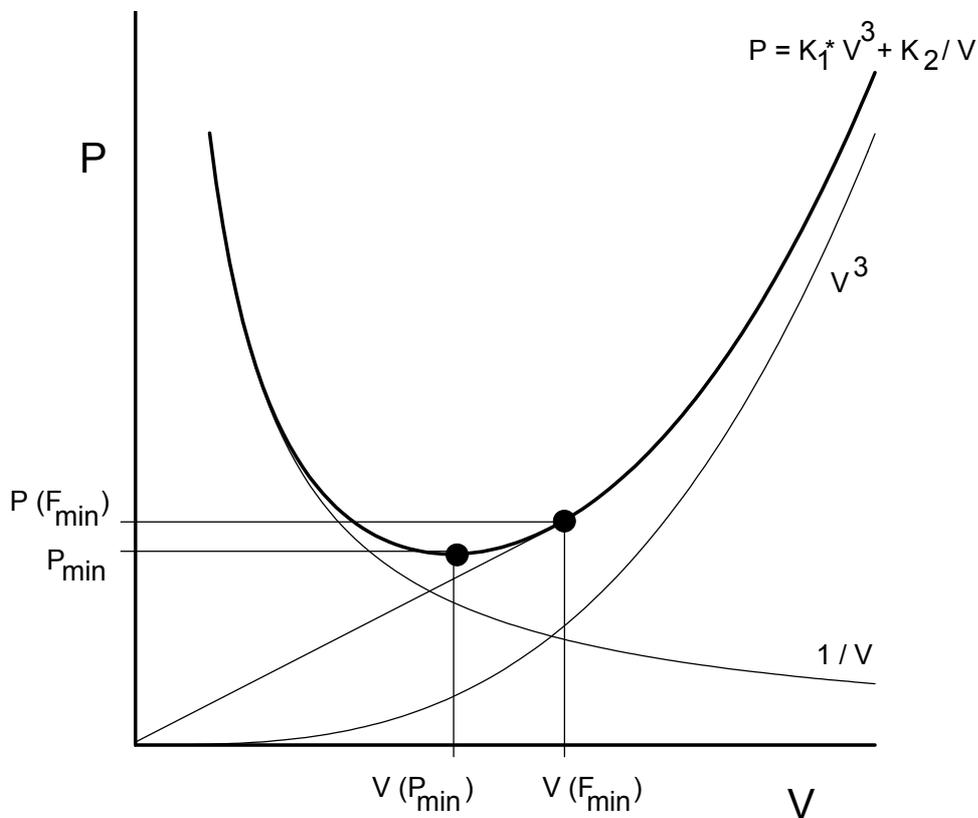


Bild 3.2: Darstellung der Schubleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

d) Für die Berechnung der Geschwindigkeit bei der das Flugzeug die geringste Leistung verbraucht, muß die Gleichung 3.9 nach der Flugeschwindigkeit differenziert werden, damit das Minimum gefunden werden kann. Der minimale Leistungsbedarf stellt sich bei der Flugeschwindigkeit

$$V_{P_{\min}} = \sqrt[4]{\frac{K}{3 \cdot c_{W_{\min}}}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S}} \quad (3.10)$$

ein. Sie ist identisch mit der in Aufgabe 4 berechneten Geschwindigkeit für das geringste Sinken beim Gleitflug. Für die Berechnung der Geschwindigkeit für den minimalen Schub muß die Gleichung 3.11

$$F = \frac{P}{V} = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_{W_{\min}} + \frac{2 \cdot K \cdot m^2 \cdot g^2}{\rho \cdot V^2 \cdot S} \quad (3.11)$$

nach der Geschwindigkeit differenziert werden. Die minimale Schubkraft wird erreicht, wenn mit einer Geschwindigkeit von

$$V_{F_{\min}} = \sqrt[4]{\frac{K}{c_{W_{\min}}}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S}} \quad (3.12)$$

geflogen wird. Diese Geschwindigkeit ist identisch mit der Geschwindigkeit für das beste Gleiten eines Flugzeuges.

f) In welchem Geschwindigkeitsbereich gilt die Approximation der Polaren? Aus Gleichung 3.8 ist erkennbar, daß bei kleiner werdenden Geschwindigkeiten ein immer größerer Auftriebsbeiwert notwendig ist. Die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$ gilt aber nur bis zu einem maximalen Auftriebsbeiwert $c_{A_{\max}}$. Dieser kann nicht überschritten werden. Dann würde die Strömung abreißen und kein Auftrieb mehr zur Verfügung stehen. Aus Gleichung 3.8 kann somit eine minimal zulässige Geschwindigkeit $V_{c_{A_{\max}}}$ angegeben werden.

$$V_{c_{A_{\max}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_{A_{\max}} \cdot S}} \quad (3.13)$$

Diese Geschwindigkeit darf nicht unterschritten werden, sonst reisst die Strömung auf der Tragfläche ab.

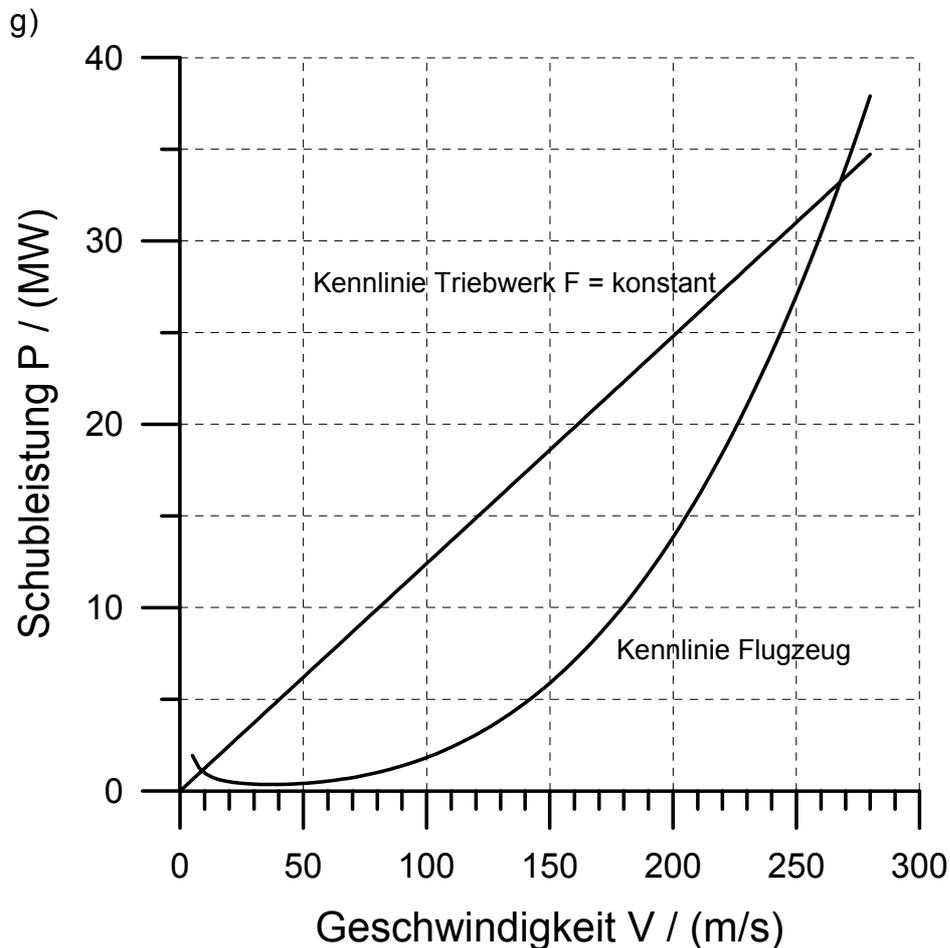


Bild 3.3: Darstellung der Schubleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

In Bild 3.3 wurde zu der Kennlinie des Flugzeuges noch die Kennlinie des Triebwerkes aufgenommen. Es wird als ein Triebwerk mit konstantem Schub angenommen. Die maximal erreichbare Geschwindigkeit ist der rechte Schnittpunkt der beiden Kennlinien. Oberhalb einer Geschwindigkeit von $268 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ reicht die Leistung des Triebwerkes nicht aus. Bei einer Geschwindigkeit von $37.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ würde das Flugzeug die minimale Schubleistung benötigen. Bei $48.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die notwendige Schubkraft am kleinsten.

Problematisch ist in diesem Beispiel die minimale Geschwindigkeit, die hier durch den maximal möglichen Auftriebsbeiwert begrenzt wird. Bei einer Geschwindigkeit von $59.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist ein notwendiger Auftriebswert $c_A = 1.5$ notwendig. Unterhalb dieser Geschwindigkeit muß zur Erreichung des notwendigen Auftriebes ein größerer Beiwert zur Verfügung stehen. Da daß nicht möglich ist, kann das Flugzeug nicht langsamer fliegen, als $59.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Geschwindigkeiten für die minimale Leistung und minimale Schubkraft können bei diesem Beispiel nicht geflogen werden. Bei anderen Flugzeugen liegt diese minimale Geschwindigkeit unter den beiden Geschwindigkeitswerten.

4 Der Gleitflug

Aufgabe:

Ein Flugzeug gleitet mit konstanter Geschwindigkeit V und einem Gleitwinkel γ .
Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$.

- a) Skizzieren Sie die Kräfte beim Gleitflug an einem Flugzeug!
Welche Kräfte treten bei diesem Vorgang auf?
- b) Wie lautet das Kräftegleichgewicht?
- c) Berechnen Sie den Gleitwinkel und die Gleitzahl als Funktion des Auftriebsbeiwertes!
- d) Bei welchem Auftriebsbeiwert ist der Gleitwinkel des Flugzeuges am geringsten? Wie groß ist dann die Gleitzahl?
- e) Bei welchem Auftriebsbeiwert ist die Sinkgeschwindigkeit des Flugzeuges am geringsten?
- f) Wie groß ist die Geschwindigkeit für:
- das beste Gleiten
- das geringste Sinken
- g) Warum verwenden Segelflugzeuge Wasserballast?

Lösungsweg:

a)

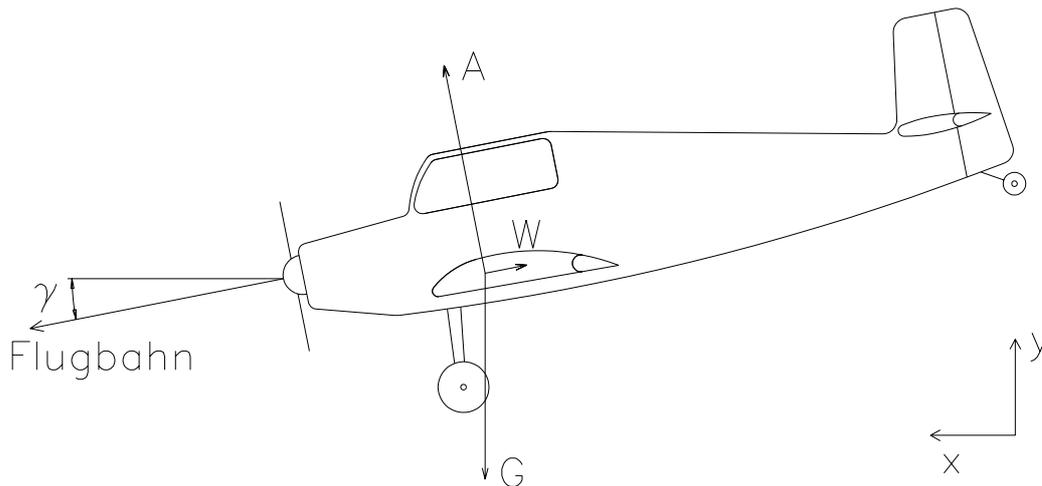


Bild 4.1: Darstellung des Flugzeuges im Gleitflug mit den angreifenden Kräften

Folgende Kräfte treten auf:

$$\text{aerodynamischer Auftrieb} \quad A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A \quad (4.1)$$

$$\text{aerodynamischer Widerstand} \quad W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_W \quad (4.2)$$

$$\text{Gewichtskraft} \quad G = m \cdot g \quad (4.3)$$

$$\text{b) Kräftegleichgewicht in:} \quad \text{x-Richtung: } A \cdot \sin \gamma - W \cdot \cos \gamma = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{y-Richtung: } A \cdot \cos \gamma + W \cdot \sin \gamma - G = 0 \quad (4.5)$$

c) Für die Berechnung des Gleitwinkels und der Gleitzahl wird das Gleichgewicht in x-Richtung verwendet. Aus $A \cdot \sin \gamma = W \cdot \cos \gamma$ kann der Gleitwinkel $\tan \gamma = \frac{W}{A} = \frac{c_W}{c_A}$ bestimmt werden. In dem Ergebnis wird die Approximation für c_W verwendet.

$$\gamma = \arctan \frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A} \quad (4.6)$$

Die Gleitzahl ist das Verhältnis aus Auftriebsbeiwert und Widerstandbeiwert. $GZ = \frac{c_A}{c_W}$. Mit der Approximation für c_W kann damit 4.7 angegeben werden.

$$GZ = \frac{c_A}{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2} \quad (4.7)$$

d) Bei der Berechnung des Auftriebsbeiwertes für den geringsten Gleitwinkel des Flugzeuges muß das Optimum der Funktion $\gamma = \arctan \frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A}$ gefunden werden. Da die arctan-Funktion monoton ist, genügt es den Extremwert der Funktion $\frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A}$ zu suchen. Nach Ableitung und Auflösung steht 4.8

$$c_{A_{\text{best.Gleit}}} = \sqrt{\frac{c_{W_{\min}}}{K}} \quad (4.8)$$

als günstigster Auftriebsbeiwert für das beste Gleiten zur Verfügung. Wird dieser Wert in die allgemeine Formel für die Gleitzahl eingesetzt kann damit die bestmögliche Gleitzahl 4.9 berechnet werden.

$$GZ_{\text{best.Gleit}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K \cdot c_{W_{\min}}}} \quad (4.9)$$

e) Zur Berechnung des Auftriebsbeiwertes für das geringste Sinken ist es notwendig die Sinkgeschwindigkeit zu berechnen. Sie ist aus $V_y = V \cdot \sin \gamma$ bestimmbar. Aus dem Kräftegleichgewicht in y-Richtung ist durch Umstellen und Einsetzen der Zusammenhang 4.10 gegeben.

$$V = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S \cdot (c_A \cdot \cos \gamma + c_W \cdot \sin \gamma)}} \quad (4.10)$$

In dieser Formel steht im Nenner eine Summe, die sich bei kleinen Gleitwinkeln γ vereinfachen lässt. Dann ist die Geschwindigkeit aus der Gleichung 4.11 berechenbar.

$$V = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S \cdot c_A}} \quad (4.11)$$

Weiterhin kann bei kleinen Gleitwinkeln $\sin \gamma = \tan \gamma = \frac{c_W}{c_A}$ gleichgesetzt werden.

Die Sinkgeschwindigkeit kann dann aus der Gleichung 4.12 berechnet werden.

$$V_y = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S} \cdot \frac{c_W}{c_A^{3/2}}} \quad (4.12)$$

An dieser Stelle wird wieder für den Widerstandsbeiwert die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$ verwendet. Damit ist die Sinkgeschwindigkeit nur noch von dem Auftriebsbeiwert und von konstanten Flugzeuggrößen abhängig.

$$V_y = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S} \cdot \frac{c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2}{c_A^{3/2}}} \quad (4.13)$$

An dieser Stelle wird die minimale Sinkgeschwindigkeit V_y gesucht. Die Funktion wird nach c_A abgeleitet und es wird die Nullstelle bestimmt. Als Ergebnis steht der Auftriebsbeiwert für das geringste Sinken fest.

$$c_{A_{\text{ger.Sink.}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot c_{W_{\min}}}{K}} \quad (4.14)$$

f) Zur Berechnung der Geschwindigkeit für das beste Gleiten und das geringste Sinken werden die ermittelten Auftriebsbeiwerte für das beste Gleiten

$$c_{A_{\text{best.Gleit.}}} = \sqrt{\frac{c_{W_{\min}}}{K}} \quad \text{und das geringste Sinken } c_{A_{\text{ger.Sink.}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot c_{W_{\min}}}{K}} \quad \text{in die Formel}$$

$V = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S \cdot c_A}}$ eingesetzt. Als Ergebnis stehen dann die Formeln für Berechnung der Geschwindigkeiten zur Verfügung.

$$V_{\text{best.Gleit.}} = \sqrt[4]{\frac{K}{c_{W_{\min}}}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S}} \quad (4.15)$$

$$V_{\text{ger.Sink.}} = \sqrt[4]{\frac{K}{3 \cdot c_{W_{\min}}}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S}} \quad (4.16)$$

Aus den beiden Geschwindigkeitsangaben kann entnommen werden, daß die Geschwindigkeit für das beste Gleiten den $\sqrt[4]{3}$ -fachen Wert der Geschwindigkeit für das geringste Sinken beträgt. Sie ist also etwa 32 % größer. Wenn sich in praktischen Beispielen ein etwas anderes Geschwindigkeitsverhältnis berechnen lässt, ist das darauf zurückzuführen, daß sich die Polaren des Flugzeuges nicht exakt durch die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$ beschreiben lassen.

g) Den Wasserballast verwenden sie, um zu Beginn des Fluges mit einer hohen Geschwindigkeit in ein Gebiet mit thermischen Auftrieb zu gelangen. Der Gleitwinkel ist nicht direkt von der Flugzeugmasse abhängig. Bei genauer Betrachtung muß aber noch berücksichtigt werden, daß eine höhere Masse zu höheren Fluggeschwindigkeiten führt, und diese zu geringfügig besseren Flügelpolaren führen kann. Mit einer größeren Masse kann somit etwas flacher, aber schneller geglitten werden.

Ist das Thermikgebiet erreicht, soll das Segelflugzeug in diesen Gebiet einen großen Höhengewinn erreichen. dafür ist eine geringe eigene Sinkgeschwindigkeit $V_y = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{\rho}{2} \cdot S} \cdot \frac{c_W}{c_A^{3/2}}}$ notwendig. Diese kann durch eine geringe

Flugzeugmasse erreicht werden. Darum wird beim Erreichen des Thermikgebietes der Wasserballast abgelassen. Es ist jedoch genau zu überlegen an welcher Stelle der Ballast abgelassen wird, da sich danach die Werte für das beste Gleiten verschlechtern.

5 Der Kurvenflug

Aufgabe:

Ein Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit eine Kurve mit dem Radius r . Dabei ändert sich nicht die Flughöhe.

- Skizzieren Sie die Kräfte beim Kurvenflug an einem Flugzeug! Welche Kräfte treten bei diesem Vorgang auf?
- Wie lautet das Kräftegleichgewicht?
- Berechnen Sie den minimalen Flugradius, der nicht unterschritten werden darf, da sonst das Lastvielfache n überschritten wird.
- Berechnen Sie den minimalen Flugradius, der nicht unterschritten werden darf, da sonst der maximal mögliche Auftriebsbeiwert überschritten wird.
- Stellen Sie den möglichen Flugbereich in einem n - V -Diagramm dar. Darin sind alle möglichen Begrenzungen des Flugbereiches anzugeben.
- Berechnen Sie die Unterpunkte c) und d) für die folgenden Beispiele:

	Flugzeug 152	Ultraleichtflugzeug
- Flügelfläche	$S = 138 \text{ m}^2$	14 m^2
- Masse	$m = 46500 \text{ kg}$	250 kg
- maximal zul. Auftriebsbeiwert	$c_{A_{\max}} = 1.5$	1.5
- Fluggeschwindigkeit	$V = 800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- zulässiges Lastvielfaches	$n_{\max} = 1.4$	2
- Luftdichte	$\rho = 1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	
- Erdbeschleunigung	$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	

Lösungsweg:

a)

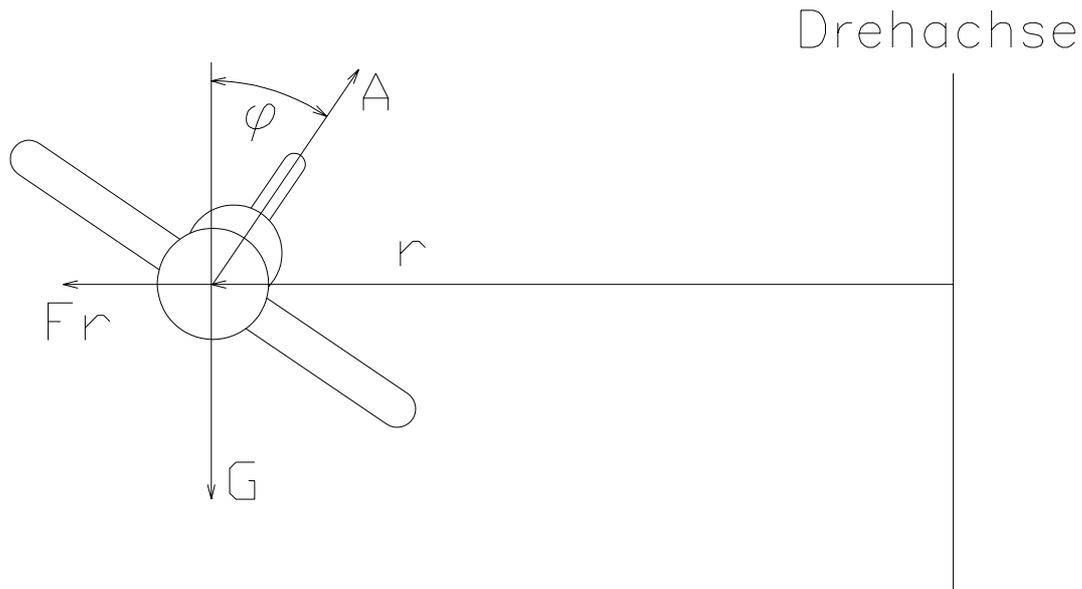


Bild 5.1: Darstellung des Flugzeuges im Kurven mit den angreifenden Kräften

Folgende Kräfte treten auf:

$$\text{aerodynamischer Auftrieb} \quad A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A \quad (5.1)$$

$$\text{Gewichtskraft} \quad G = m \cdot g \quad (5.2)$$

$$\text{Radialkraft} \quad Fr = m \cdot a_r = m \cdot \frac{V^2}{r} \quad (5.3)$$

$$\text{b) Kräftegleichgewicht in: x-Richtung: } -Fr + A \cdot \sin \varphi = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{y-Richtung: } -G + A \cdot \cos \varphi = 0 \quad (5.5)$$

c) Die Beschleunigung im Flugzeug setzt sich zusammen aus der Erdbeschleunigung und der Radialbeschleunigung.

$$a_{\text{ges}} = \sqrt{g^2 + a_r^2} \quad (5.6)$$

Darin kann die Radialbeschleunigung wie in Gleichung 5.3 ersetzt werden. Als Ergebnis steht ein Ausdruck für das Lastvielfache zur Verfügung.

$$n = \frac{a_{\text{ges}}}{g} = \sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2 \cdot r^2}} \quad (5.7)$$

Diese Formel kann nach r umgestellt werden. Als Ergebnis erhält man ein Radius der aus dem Lastvielfachen bestimmt werden kann. Die Radius kann nicht unterschritten werden. Er stellt ein unteren Wert dar, der durch das maximale Lastvielfache begrenzt wird.

$$r_{\text{min}} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_{\text{max}}^2 - 1}} \quad (5.8)$$

d) Für die Berechnung des minimalen Flugradius, der nicht unterschritten werden darf, da sonst der maximal mögliche Auftriebsbeiwert überschritten wird, ist die Gleichung 5.1, 5.3 und 5.4 zu verwenden. Durch Umstellen erhält man eine Gleichung für den minimalen Flugradius. Der darin enthaltene Winkel kann aus der 5.1, 5.2 und 5.5 bestimmt werden.

$$r_{\text{min}} = \frac{2 \cdot m}{\rho \cdot S \cdot c_{A_{\text{max}}} \cdot \sin \varphi} \quad (5.9)$$

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot V^2 \cdot S \cdot c_A} \quad (5.10)$$

Die beiden Gleichungen 5.9 und 5.10 können benutzt werden, um ein minimalen Flugradius zu berechnen. Wird dieser unterschritten, überzieht das Flugzeug.

e)

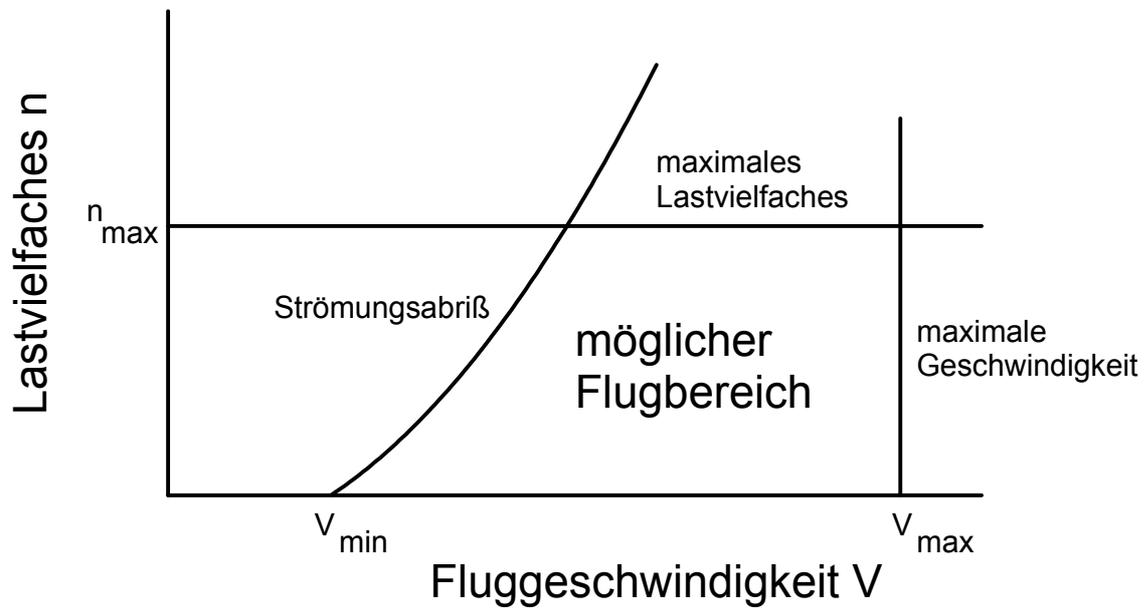


Bild 5.2: Darstellung des möglichen Flugbereiches beim Kurvenflug

In Bild 5.2 erkennt man den möglichen Flugbereich eines Flugzeuges beim Kurvenflug. Der Bereich wird begrenzt durch die Linien des Strömungsabrisses, das maximal zulässige Lastvielfache und die maximal mögliche Geschwindigkeit. Das Flugzeug kann sich nur innerhalb des angegebenen Bereiches bewegen. Das maximale Lastvielfache kann von der Festigkeit des Flugzeuges oder von der maximal möglichen Belastung der Besatzung begrenzt werden.

f) Berechnung minimaler Kurvenradius:

	Flugzeug 152	Ultraleichtflugzeug
Begrenzung durch Lastvielfaches:	$r_{\min} = 5140 \text{ m}$	$r_{\min} = 22.3 \text{ m}$
Begrenzung durch Auftriebsbeiwert:	$r_{\min} = 360 \text{ m}$	$r_{\min} = 21.9 \text{ m}$

Bei dem Flugzeug 152 wird bei einem Kurvenflug sehr früh das maximal zulässige Lastvielfache erreicht, erst sehr viel später ist mit einem Überziehen zu rechnen. Bei dem Ultraleichtflugzeug ist bei einem Kurvenflug zugleich mit dem maximalen Lastvielfachen und dem Überziehen zu rechnen.

6 Der Luftraum

Aufgabe:

Leiten sie die Abhängigkeit des Druckes und der Luftdichte in Abhängigkeit von der Höhe her!

Lösungsweg:

Ausgangspunkt der Überlegung ist die Kräftebilanz an eine Volumenelement. Dieses Volumenelement hat auf der Ober- und Unterseite eine Druckkraft und eine innere Gewichtskraft, siehe Bild 6.1.

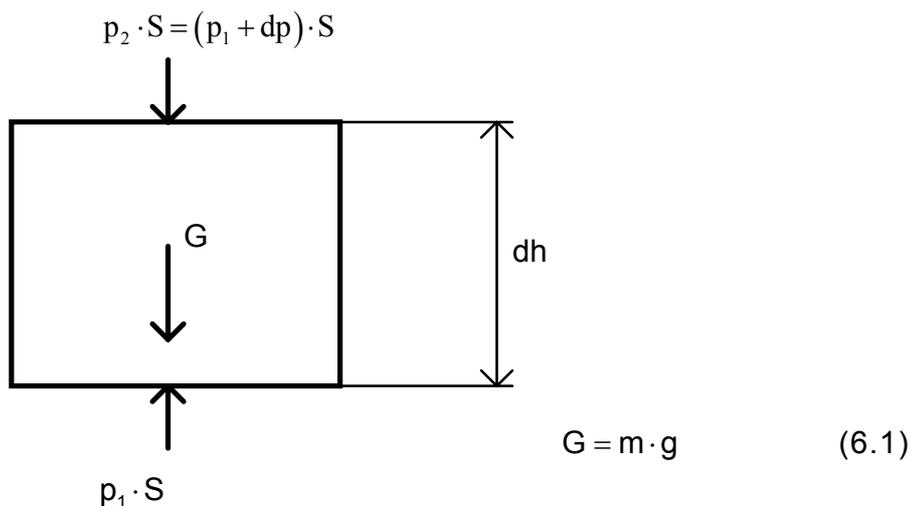


Bild 6.1: Die Kräfte an einem Volumenelement

Aus dem Kräfteansatz kann die Gleichung 6.2 ermittelt werden.

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g \quad (6.2)$$

Da für die Luftschichtung eine polytrope Schichtung angenommen wird, kann damit noch der Zusammenhang 6.3 angegeben werden.

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{konstant} \quad (6.3)$$

Durch Integration der Gleichung 6.2 unter Zuhilfenahme der Gleichung 6.3 und des Gasgesetzes $p = \rho \cdot R \cdot T$ können Gleichungen für den Druck, die Dichte und die Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe angegeben werden.

$$p = p_0 \left[1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R \cdot T_0} \cdot h \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (6.4)$$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R \cdot T_0} \cdot h \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (6.5)$$

$$T = T_0 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R} \cdot h \quad (6.6)$$

In diesen Gleichungen fehlt eine Angabe für die Konstante n . Diese kann bestimmt werden, da die Temperaturschichtung innerhalb der Schicht 0 bis 10 km bekannt ist. In diesem Bereich herrscht eine konstante Temperaturschichtung von $\frac{dT}{dh} = -6.5 \frac{\text{K}}{\text{km}}$ vorhanden. Mit diesem Wert kann mit der differenzierten Gleichung 6.6 die Konstante n bestimmt werden.

$$n = \frac{1}{1 + \frac{R}{g} \cdot \frac{dT}{dh}} \quad (6.7)$$

Mit diese Gleichung kann ein $n = 1.235$ berechnet werden.

Die von der ICAO festgelegten Werte für den Druck, die Dichte und die Temperatur am Boden lauten:

$$p_0 = 101330 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 288.15 \text{ K}$$

$$\rho_0 = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Damit können jetzt Berechnungsformeln angegeben werden:

$$p = 101330 \left[1 - 2.2558 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{h}{(\text{m})} \right]^{5.2586} \cdot (\text{Pa}) \quad (6.8)$$

$$\rho = 1.225 \left[1 - 2.2558 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{h}{(\text{m})} \right]^{4.2586} \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \quad (6.9)$$

$$T = 288.15 \cdot (\text{K}) - 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{h}{(\text{m})} \cdot (\text{K}) \quad (6.10)$$

Der Zusammenhang 6.10 ist linear. Die beiden Verläufe 6.8 und 6.9 sind in der Tabelle 6.1 und Bild 6.2 dargestellt.

Tabelle 6.1: Abhängigkeit des Druckes, der Luftdichte und der Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe

h / (m)	p / (Pa)	$\rho / (\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$	T / (K)
0	101330	1,225	288,15
100	100134	1,213	287,50
200	98949	1,202	286,85
300	97776	1,190	286,20
400	96613	1,179	285,55
500	95463	1,167	284,90
600	94323	1,156	284,25
700	93194	1,145	283,60
800	92076	1,134	282,95
900	90969	1,123	282,30
1000	89873	1,112	281,65
1500	84552	1,058	278,40
2000	79489	1,006	275,15
3000	70098	0,909	268,65
4000	61627	0,819	262,15
5000	54004	0,736	255,65
6000	47164	0,659	249,15
7000	41043	0,589	242,65
8000	35582	0,525	236,15
9000	30724	0,466	229,65
10000	26419	0,412	223,15
11000	22615	0,364	216,65

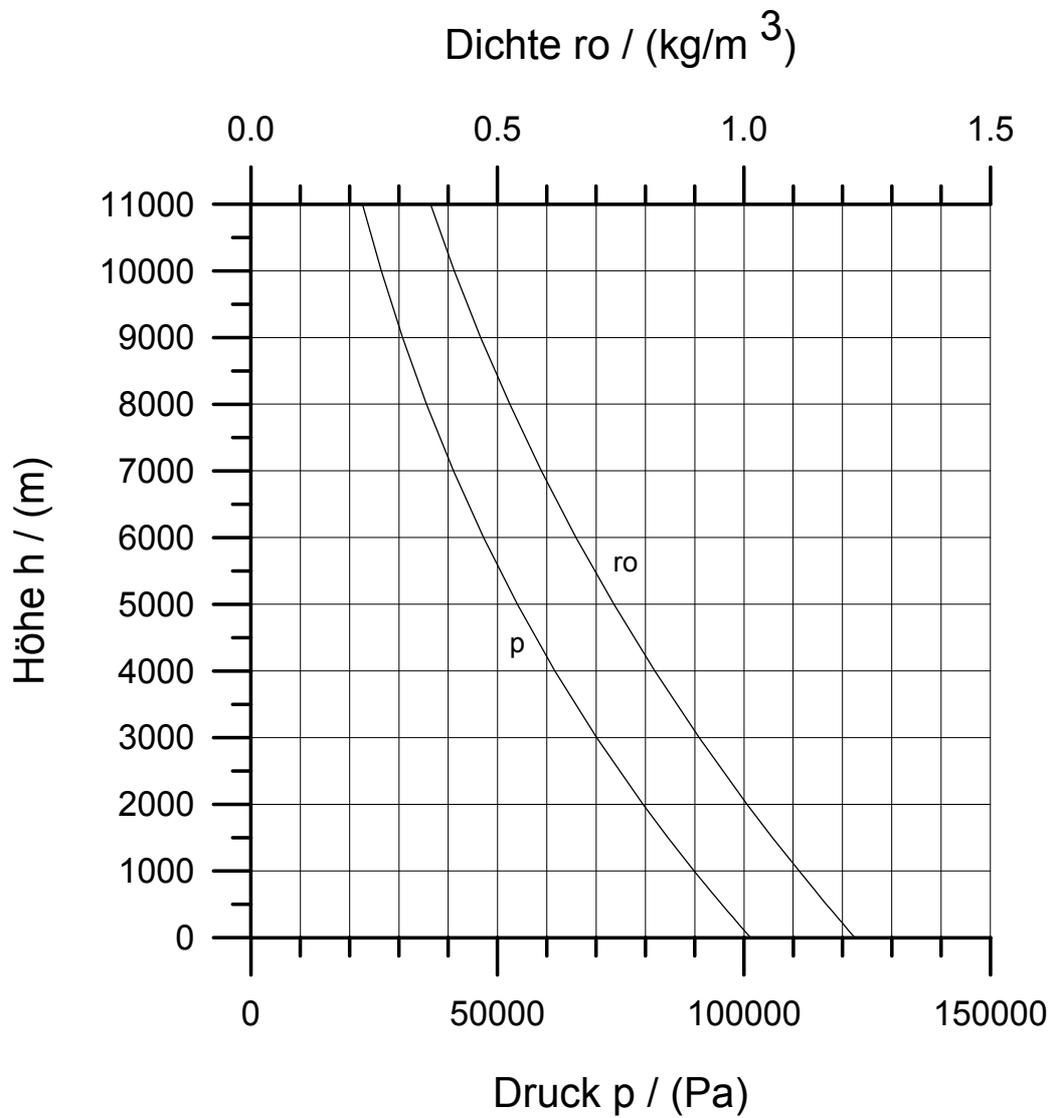


Bild 6.2: Darstellung der Abhängigkeit des Druckes, der Luftdichte und der Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe

7 Der Reiseflug bei verschiedenen Flughöhen

Aufgabe:

Stellen sie die Schubleistung für das folgende Beispiel in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit bei der Höhe $h = 0$, bei $h = 5$ km und bei $h = 11$ km graphisch dar! Benutzen Sie dafür die Formel (3.9) aus dem Kapitel Reiseflug!

Flugzeug 152 des Flugzeugwerkes Dresden

- Flügelfläche	S	= 138 m ²
- Masse	m	= 46500 kg
- minimaler Widerstandsbeiwert	$c_{W_{\min}}$	= 0.02
- Konstante in der Approximation	K	= 0.004
- Luftdichte	ρ	= 1.25 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Erdbeschleunigung	g	= 9.81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lösungsweg:

Die Luftdichte beträgt bei	$h = 0$	1.225 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
	$h = 5$ km	0.736 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
	$h = 11$ km	0.364 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Die Dichte wird in die Gleichung 7.1 eingesetzt. Im Bild 7.1 sind die Leistungsanforderungen bei den drei Flughöhen dargestellt.

$$P = \frac{\rho}{2} V^3 \cdot S \cdot c_{W_{\min}} + \frac{2 \cdot K \cdot m^2 \cdot g^2}{\rho \cdot V \cdot S} \quad (7.1)$$

In Bild 7.1 ist die Abhängigkeit der erforderlichen Schubleistung von der Fluggeschwindigkeit dargestellt.

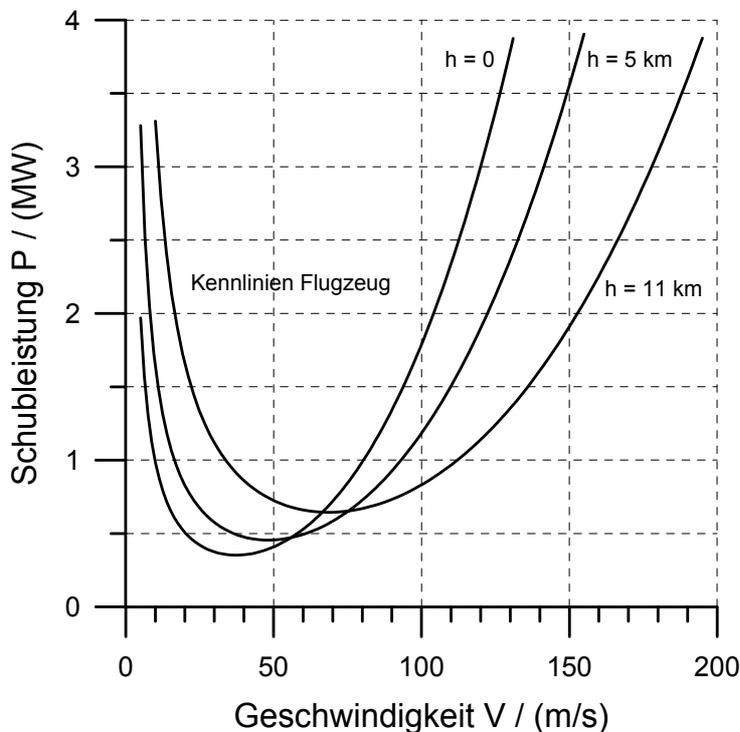


Bild 7.1: Darstellung der Schubleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bei verschiedenen Flughöhen

Es ist zu erkennen, daß die minimal notwendige Leistung bei der Höhe $h = 0$ bei einer Geschwindigkeit von etwa $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ benötigt wird. Bewegt sich das Flugzeug in einer Höhe von 11 km, muß es zu Erreichung der minimalen Leistung schon $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ fliegen. Die dazu notwendige Leistung ist fast doppelt so groß, wie die minimale Leistung in Bodennähe bei $h = 0$.

Bei hohen Fluggeschwindigkeiten muß jedoch in Bodennähe mit mehr Schubleistung geflogen werden. Das ist die Begründung warum die Flugzeuge bei großen zurückzulegenden Entfernungen in eine große Flughöhe gehen. Das Aufsteigen lohnt sich aber erst bei großen Entfernungen, da dafür auch Leistung benötigt wird. Im Bild 7.1 kann man erkennen, daß man bei der Geschwindigkeit $130 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in 11 km Höhe nur etwa $1/3$ von der notwendigen Leistung in Bodennähe benötigt. Bei größeren Geschwindigkeiten fällt dieses Verhältnis noch ausgeprägter aus.

8 Der induzierte Widerstand an einer Tragfläche

Aufgabe:

Berechnen sie den induzierten Widerstand und den induzierten Auftrieb einer Tragfläche mit dem System der tragenden Linie. Vergleichen sie unterschiedliche Tragflügelvariationen.

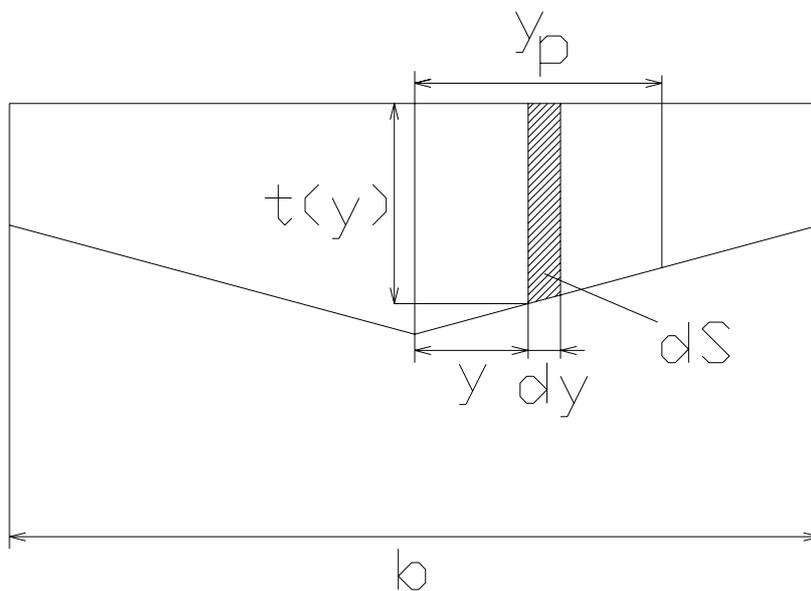


Bild 8.1: Draufsicht auf die Tragfläche

Lösungsweg:

Die örtliche Zirkulation einer ebenen Tragfläche kann aus 8.1 berechnet werden.

$$\Gamma(y) = \pi \cdot \alpha(y) \cdot V \cdot t(y) \quad (8.1)$$

Die Zirkulation wird benötigt, um die induzierte Geschwindigkeit zu berechnen. Dafür ist das Integral 8.2 zu lösen.

$$w_i(y_p) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{1}{y_p - y} dy \quad (8.2)$$

Da die Stelle $y_p = y$ eine Singularität ist, muß das Integral in zwei Anteile aufgelöst werden. Für die durchzuführenden Berechnungen wird der Ausdruck 8.3 verwendet.

$$w_i(y_p) = \frac{1}{4\pi} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-b/2}^{y_p - \varepsilon} \dots dy + \int_{y_p + \varepsilon}^{b/2} \dots dy \right\} \quad (8.3)$$

Dadurch wird die singuläre Stelle bei $y_p = y$ übersprungen. Stehen die induzierte Geschwindigkeit zur Verfügung, können die drei Integrale für die Flügelfläche S , den Auftrieb A und den Widerstand W gelöst werden.

$$S = \int_{-b/2}^{b/2} t(y) \cdot dy \quad (8.4)$$

$$A = \rho \cdot V \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \cdot dy \quad (8.5)$$

$$W = \rho \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \cdot w_i(y) \cdot dy \quad (8.6)$$

Aus diesen Werten können die dimensionslosen Parameter c_A und c_W bestimmt werden.

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} V \cdot S} \quad (8.7)$$

$$c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} V \cdot S} \quad (8.8)$$

Diese Werte können graphisch dargestellt werden. In einem Berechnungsprogramm besteht nun die Möglichkeit den Anstellwinkel einer Tragfläche vorzugeben. Daraus ist die Zirkulationverteilung ermittelbar. nach der Berechnung der induzierten Geschwindigkeit können die Parameter c_A und c_W angegeben werden.

Zu berücksichtigen ist jedoch, daß die induzierte Geschwindigkeit den wahren Anströmwinkel beeinflusst. Darum muß in dem Berechnungsprogramm iterativ vorgegangen werden. Im Folgenden sind einige Resultate dieses Programmes aufgeführt.

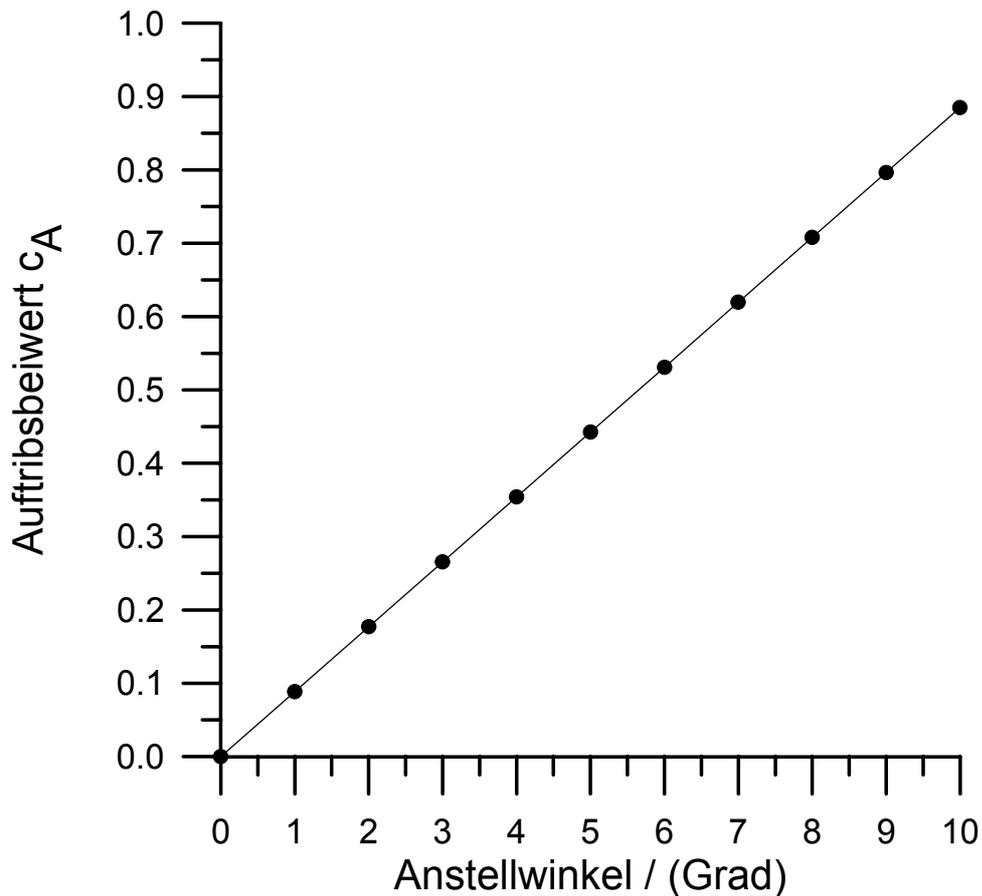


Bild 8.2: Darstellung des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit vom Anstellwinkel

Als erstes ist die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes einer Tragfläche mit einem Seitenverhältnis von $\Lambda=10$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel dargestellt, siehe Bild 8.2. Es ist zu erkennen, daß der Auftriebsbeiwert linear vom Anstellwinkel abhängt. Da der Auftriebsbeiwert linear in der Gleichung zu Berechnung des Auftriebes enthalten ist, kann ausgesagt werden, daß der Auftrieb einer Tragfläche linear von seinem Anstellwinkel abhängt. Bei einer flachen Platte ist bei einem Anstellwinkel von 0 Grad auch kein Auftrieb vorhanden. Verfügt die Tragfläche hingegen über eine Wölbung, ist auch ein Auftrieb bei einem Plattenanstellwinkel von 0 Grad vorhanden. Aber auch bei der gewölbten Tragfläche ist der Zusammenhang von Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit vom Anstellwinkel linear. Dort existiert ein von Null verschiedener Winkel, bei dem kein Auftrieb vorhanden ist. Dieser wird Nullauftriebswinkel genannt.

In Bild 8.3 ist die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit vom Widerstandsbeiwert dargestellt. Es ist zu erkennen, daß bei einem Anstellwinkel von 0 Grad kein Auftrieb und auch kein Widerstand vorhanden ist. Dazu muß bemerkt werden, daß nur der hier berechnete induzierte Widerstand nicht vorhanden ist. Bei gemessenen Polaren ist auch bei der waagerechten Platte ein Widerstand vorhanden. Dieser ist aber nicht induziert, sondern auf die Reibung der Luft auf die Oberfläche zurückzuführen. In Bild 8.3 ist weiterhin sichtbar, daß der Auftriebsbeiwert quadratisch von dem Widerstandsbeiwert abhängt. Berücksichtigt man den Reibungswiderstand, der noch auftritt, kann die Approximation $c_W = c_{W_{\min}} + K \cdot c_A^2$ aus der Berechnung bestimmt werden. Bei genauer Untersuchung ergibt sich, daß die Konstante K nur von dem Seitenverhältnis abhängt.

$$K = \frac{1}{\pi \cdot \Lambda} \quad (8.9)$$

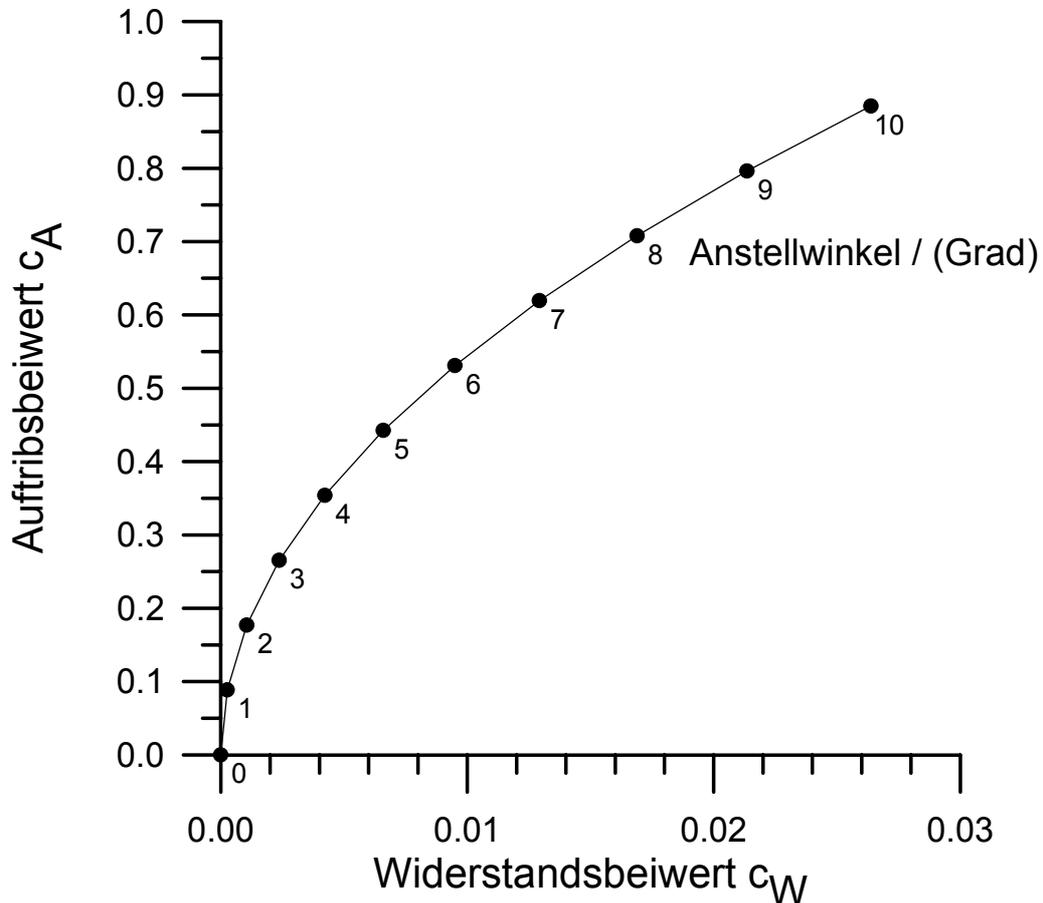


Bild 8.3: Darstellung des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit vom Widerstandsbeiwert

Daraus kann geschlossen werden, daß der induzierte Widerstand gering gehalten werden kann, wenn eine große Streckung verwendet wird. Darum ist bei Leistungssegelflugzeugen die Streckung sehr hoch.

In den folgenden Darstellungen wird der Einfluß der Geometrie auf die Umströmung der Tragfläche untersucht. Es wurden ein Rechteckflügel, ein Dreieckflügel und ein Flügel mit elliptischer Tiefenverteilung untersucht, siehe Bild 8.4. Die Streckung b.z.w. das Seitenverhältnis beträgt jeweils $\Lambda=10$. Die Spannweite und der Flächeninhalt ist auch in den drei Beispielen gleich.

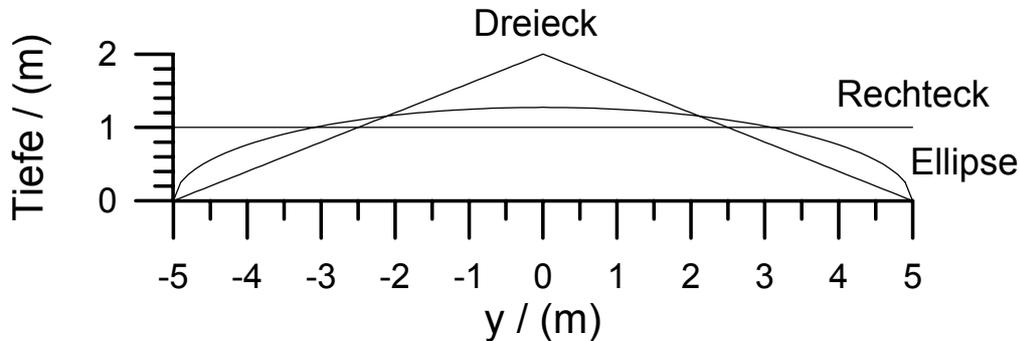


Bild 8.4: Darstellung der drei untersuchten Geometrien

In Bild 8.5 ist der effektive Anstellwinkel der drei Varianten dargestellt, der sich bei einem Einstellwinkel von 10 Grad ergibt. Das Profil der elliptischen Tragfläche wird über die gesamte Breite mit etwa 8 Grad angeströmt. Die rechteckige Tragfläche wird innen mit etwa 9 Grad angeströmt. An den Außenrändern fällt dieser Wert stark ab. Vorteilhaft bei dieser Konfiguration ist das Verhalten beim starken Anstellen der Tragfläche. Dann reißt die Strömung zuerst in der Mitte ab, da dort die effektiven Anstellwinkel am größten sind. Bei einem Flugzeug hat das den Vorteil, daß nur ein Verlust des Auftriebes zu beobachten ist. Ein Drehmoment um die Längsachse entsteht nicht da die Kraft etwa in der Mitte verringert wird. Die Strömung an den Tragflächenspitzen liegt weiterhin an. Die Funktion der Querruder ist damit gesichert.

Anders verläuft das Abreißen an dem Flügel mit dreieckigem Grundriß. Hier werden die Profile bei einem Anstellwinkel von 10 Grad außen am steilsten angeströmt. Dieser Wert beträgt in dem Beispiel 11 Grad. In der Tragflächenmitte beträgt der effektive Anströmwinkel nur etwa 7 Grad.

Das hat zu Folge, daß beim Überziehen die Strömung zuerst an den Flügelspitzen abreißt. Da eine Flügelseite zuerst abreissen wird, ist es möglich, daß das Flugzeug seitlich wegkippt. Außerdem werden die Querruder bei dieser Konfiguration nicht mehr umströmt und arbeiten daher nicht mehr.

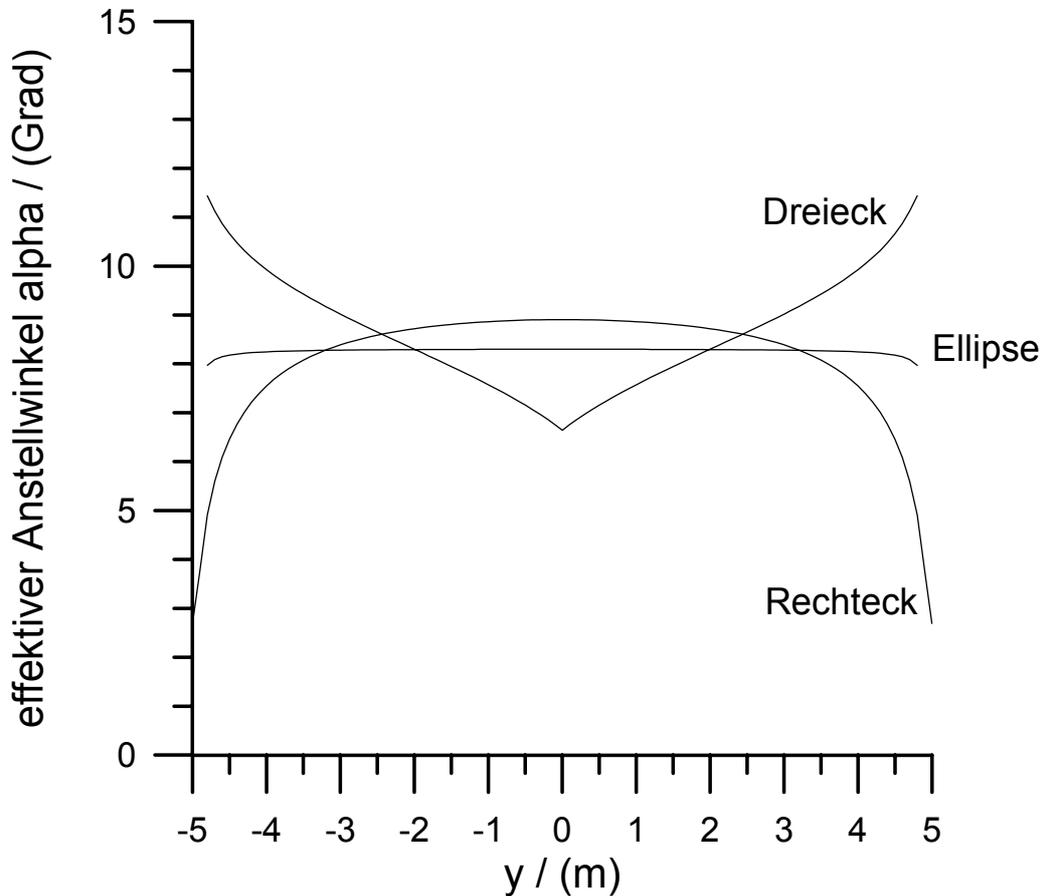


Bild 8.5: Darstellung der effektiven Anstellwinkel der drei untersuchten Geometrien bei einem geometrischen Anstellwinkel von 10 Grad

In Bild 8.6 ist gezeigt, wie das Verhältnis von Auftriebsbeiwert zum Anstellwinkel von der Streckung abhängt. Bei dem Wert $\frac{d(c_A)}{d(\alpha)}$ ist der Winkel im Bogenmaß einzusetzen. Es ist zu erkennen, daß bei einem Tragflügel mit geringer Streckung ein hoher Anstellwinkel verwendet werden muß, um ein vorgegebenen Auftriebsbeiwert zu erreichen. Bei großen Streckungen muß für den gleichen Auftriebsbeiwert nicht so stark angestellt werden.

Der Grenzwert bei $\Lambda = \infty$ ist $\frac{d(c_A)}{d(\alpha)} = 2 \cdot \pi$.

Verwendet werden kann diese Abhängigkeit auch bei der Berechnung der Flugstabilität. Dort wird eine Angabe von $\frac{d(c_A)}{d(\alpha)}$ benötigt. Unterschiedliche

Streckungen bei Tragfläche und Leitwerk führen dazu, daß eine Änderung des Anstellwinkels zu zusätzlichen Verschiebungen des Druckpunktes führt. Häufig sind unterschiedliche Streckungen notwendig um eine ausreichende Flugstabilität zu erreichen.

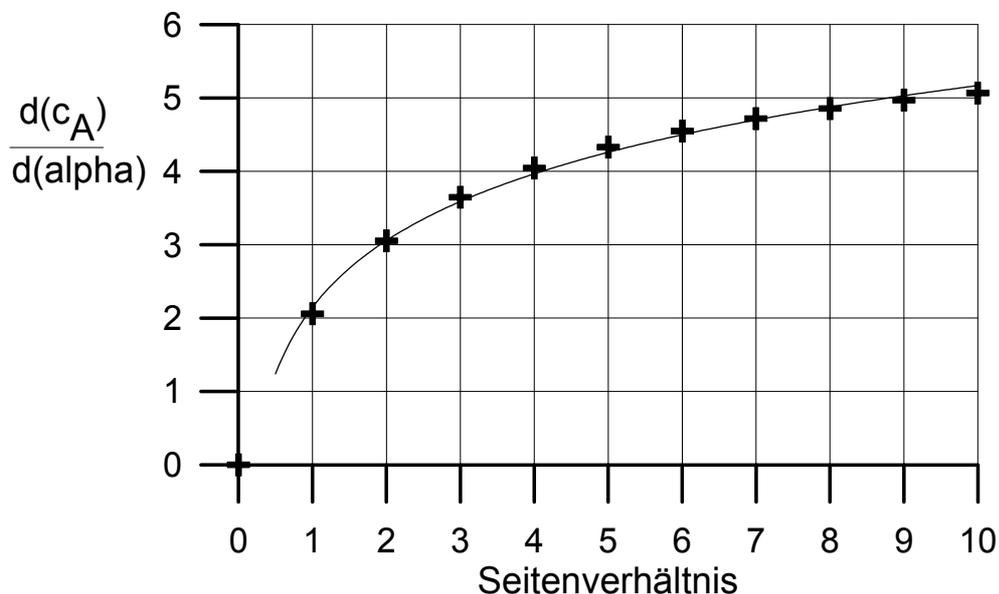


Bild 8.6: Darstellung des Anstiges Auftriebsbeiwertes zu Anstellwinkel bei unterschiedlichen Seitenverhältnissen Λ

Im Bild 8.6 wurde zusätzliche eine Approximationsfunktion dargestellt, die die numerisch berechneten Werte gut widerspiegelt. Sie ist im Bereich von $1 \leq \Lambda \leq 10$ verwendbar.

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 1.3 \cdot \ln(\Lambda) + 2.2 \quad (8.10)$$

9 Übungen zum Nickmoment, Druckpunkt und Neutralpunkt

Mit einer 3-Komponentenwaage wurde an einem Tragflügel, siehe Bild 9.1, der Auftrieb, der Widerstand und das Nickmoment am Punkt 1 gemessen.

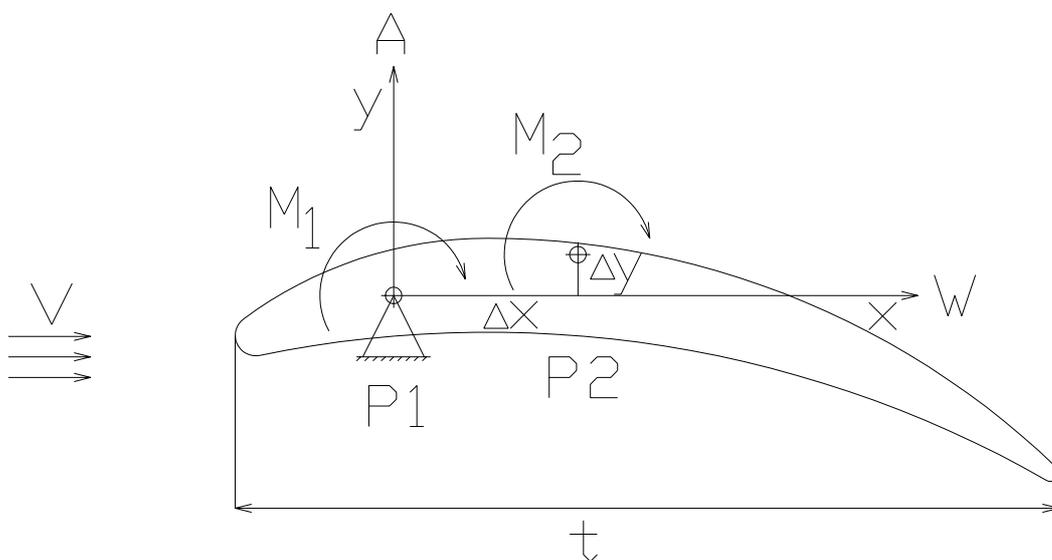


Bild 9.1: Darstellung des Versuchsaufbaues

$$A = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_A \quad (9.1)$$

$$W = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot c_W \quad (9.2)$$

$$M_1 = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot t \cdot c_{M_1} \quad (9.3)$$

Bei der Messung wurde der Anstellwinkel der Fläche um Punkt 1 variiert und die Abhängigkeit des Momentenbeiwertes c_{M_1} von dem Auftriebsbeiwert c_A dargestellt, siehe Bild 9.2. Die Abhängigkeit kann approximiert werden mit

$$c_{M_1} = c_{M_0} + \frac{dc_{M_1}}{dc_A} \cdot c_A \quad (9.4)$$

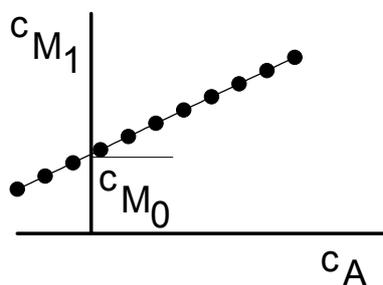


Bild 9.2: Darstellung des Momentenbeiwertes in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert

Aufgabe:

- a) Die Daten der Messung am Punkt 1 stehen zur Verfügung. Für einen anderen Anwendungsfall werden die Werte für Auftrieb, Widerstand und Nickmoment benötigt, die sich ergeben würden, wenn der Tragflügel am Punkt 2 gelagert wird. Geben sie eine Funktion für Momentenbeiwertes c_{M_2} an!
- b) An welcher Stelle x ist das Drehmoment konstant?
- c) An welcher Stelle x ist das Drehmoment gleich Null.

Lösungsweg:

a) Das Drehmoment am Punkt 2 kann bestimmt werden durch den Ausdruck 9.5. Bei Abschätzung der einzelnen Größen wird angenommen, daß der Auftrieb A wesentlich größer als der Widerstand W ist. Ebenso wird angenommen, daß Δy viel kleiner als Δx ist. Darum kann der 3. Summand vernachlässigt werden, siehe Ausdruck 9.6. Im Anschluß daran kann der Ausdruck durch $\frac{\rho}{2} V^2 \cdot S \cdot t$ dividiert werden. Als Ergebnis steht die dimensionlose Gleichung 9.7 zur Verfügung.

$$M_2 = M_1 + A \cdot \Delta x - W \cdot \Delta y \quad (9.5)$$

$$M_2 = M_1 + A \cdot \Delta x \quad (9.6)$$

$$c_{M_2} = c_{M_1} + c_A \cdot \frac{\Delta x}{t} \quad (9.7)$$

In dem letzten Ausdruck wird die Gleichung 9.4 für den Ausdruck c_{M_1} eingesetzt. Als Ergebnis erhält man den Zusammenhang 9.8.

$$c_{M_2} = c_{M_0} + \frac{dc_{M_1}}{dc_A} \cdot c_A + c_A \cdot \frac{\Delta x}{t} \quad (9.8)$$

An dieser Stelle kann man erkennen, daß bei der Wahl von $\left. \frac{\Delta x}{t} \right|_N = -\frac{dc_{M_1}}{dc_A}$ der Momentenbeiwert c_{M_2} konstant ist und nicht vom Auftriebsbeiwert abhängt. Dieser Punkt wird darum 'Neutralpunkt' genannt. Für die Berechnung von Tragflügelreaktionen ist es günstig, mit diesem Punkt zu arbeiten, da das angreifende Moment konstant ist. Der Punkt liegt bei vielen Profilen bei 24..27% der Profiltiefe, also etwa bei $\frac{t}{4}$.

Ebenso kann überlegt werden wo sich ein Punkt befindet, an dem der Momentenbeiwert $c_{M_2} = 0$ ist. Durch Umstellung von 9.8 kommt man zu 9.9.

$$\left. \frac{\Delta x}{t} \right|_D = \left. \frac{\Delta x}{t} \right|_N - \frac{c_{M_0}}{c_A} \quad (9.9)$$

In dieser Gleichung erkennt man, daß die Lage dieses 'Druckpunktes' vom Auftriebsbeiwert abhängt. Eine Besonderheit tritt bei symmetrischen Profilen auf. Sie verfügen wegen der Symetrie über kein Moment wenn sie kein Auftrieb erzeugen, siehe Bild 9.1. Ihr Wert c_{M_0} ist daher gleich Null. Das hat zur Folge, daß bei diesen Profilen der Neutralpunkt und der Druckpunkt zusammenfallen, siehe Gleichung 9.9.

Darum sind symetrische Profile gut als Steuerruder geeignet. Sie werden im Neutralpunkt drehbar befestigt, und können eine Kraft erzeugen ohne daß bei der Verstellung ein aerodynamisches Moment überwunden werden muß.

Einige Beispiele für die Momentenbeiwerte sind in Tabelle 9.1 zu entnehmen.

Tabelle 9.1 Momentenbeiwerte für einige Profile

Profilname	c_{M_0}	Bemerkung
NACA 0009, 12, 18	0	symmetrisch
NACA 4409, 4412	-0.09	4% Profilhöhlung
NACA 6412	-0.14	6% Profilhöhlung
FX 73-170	-0.11	verwendet in Segelflugzeugen
FX 66-H-60	+0.03	S-Schlag
EJ 85	-0.21	Jedelsky-Profil mit 8% Profilhöhlung

Zur Abschätzung des Momentenbeiwertes kann der Zusammenhang 9.10 verwendet werden. In ihn gehen nur die Profilhöhlung f_{max} und die Rücklage x_f ein. Aus der Tabelle 9.1, aus weiteren Tabellendaten und aus der Gleichung 9.10 kann geschlossen werden, daß Profile mit einer großen Höhlung einen großen Momentenbeiwert besitzen.

$$c_{M_0} = - \frac{\frac{f_{max}}{(\%)} \cdot \left(\frac{x_f}{(\%)} - 16 \right)}{1000} \quad (9.10)$$

10 Die Flugstabilität einer einzelnen Tragfläche

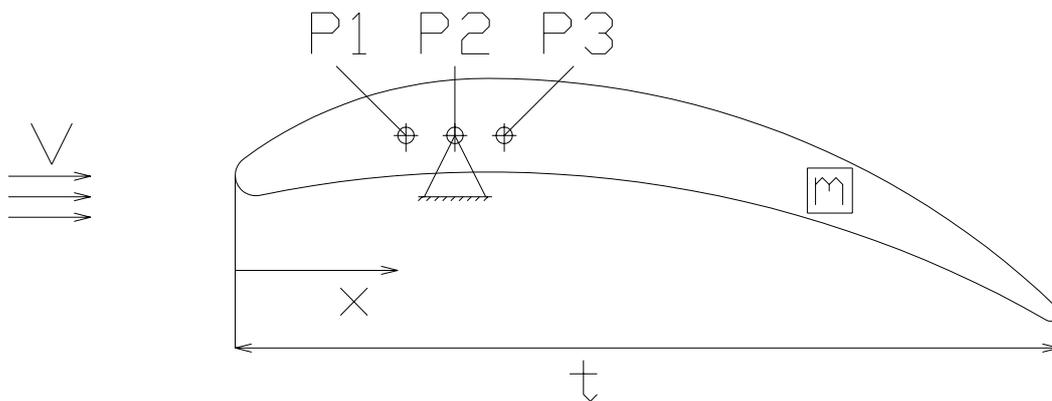


Bild 10.1: Darstellung des Versuchsaufbaues

In dem in Bild 10.1 dargestellten Versuchsaufbau kann ein Profil an drei verschiedenen Punkten drehbar gelagert werden. Der Punkt P2 ist der Neutralpunkt. Punkt P1 befindet sich vor dem Neutralpunkt und P3 dahinter. Nachdem das Profil in einem Punkt gelagert wird, kann das angeströmte Profil mit der Ausgleichsmasse m ins Gleichgewicht gebracht werden.

Aufgabe:

Was passiert in den drei Fällen, wenn das Profil aus der Gleichgewichtslage gebracht wird?

Lösungsweg:

Aus Gleichung 9.8 kann die folgende Gleichung 10.1 bestimmt werden.

$$c_M = c_{M_0} + \left(\frac{x}{t} \Big|_N + \frac{x}{t} \right) \cdot c_A + c_{M_{\text{Ausgleich}}} \quad (10.1)$$

Aus ihr kann entnommen werden, daß bei der Lagerung des Profils auf dem Neutralpunkt ($\frac{x}{t} = \frac{x}{t_N}$) der Momentenbeiwert nicht vom Auftriebsbeiwert abhängt.

Dann ist $\frac{dc_M}{dc_A} = 0$. Wird das Profil vor dem Neutralpunkt befestigt so ist $\frac{x}{t} < \frac{x}{t_N}$. In diesem Fall fällt der Momentenbeiwert wenn der Auftriebsbeiwert steigt. $\frac{dc_M}{dc_A} < 0$.

Bei der Lagerung hinter dem Neutralpunkt ist der Vorgang entsprechend umgekehrt.

Für die Berechnung der Stabilität der Anordnung können folgende Abläufe angegeben werden:

Lagerung bei P1	Lagerung bei P2	Lagerung bei P3
α steigt	α steigt	α steigt
c_A steigt	c_A steigt	c_A steigt
c_M fällt	c_M bleibt konstant	c_M steigt
M fällt	M bleibt konstant	M steigt
α fällt wieder	α bleibt konstant	α steigt weiter
stabil	indifferent	labil

Aus dieser Überlegung können folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

Dreht sich eine Tragfläche um ein Punkt, der vor dem Neutralpunkt liegt, so wird sie sich zurückstellen. Bei einer Drehung um eine Punkt hinter dem Neutralpunkt ist die Anordnung labil. Da sich ein frei bewegbarer Körper immer um seinen Massenschwerpunkt drehen kann die Stabilitätsbedingung aufgestellt werden:

Eine Tragfläche ist dann stabil, wenn sich der Massenschwerpunkt vor dem Neutralpunkt liegt.

Diese Bedingung kann auch aus der folgenden Überlegung gefunden werden:

Da im Neutralpunkt das resultierende Moment konstant ist, kann man sagen, daß bei einer Änderung des Anstellwinkels der Neutralpunkt der Punkt ist, indem die zusätzliche Kraft wirkt ohne in ihm ein weiteres Moment zu erzeugen. Bei einer Erhöhung des Anstellwinkels entsteht somit im Neutralpunkt ein zusätzlicher Auftrieb der im stabilen Fall hinter dem Massenschwerpunkt angreift und somit rückstellend wirkt.

Da Massenschwerpunkt und Druckpunkt beim stationären Flug zusammenliegen kann aus der Formel 9.9 geschlossen werden, daß sich bei einer einzelnen Tragfläche der Schwerpunkt nur vor dem Neutralpunkt liegen kann wenn der Momentenbeiwert c_M positiv ist. Das ist nur bei wenigen Profilen so, siehe Tabelle 9.1. Bei Nurflügelflugzeugen mit rechteckiger Flügelfläche müssen daher Profile mit S-Schlag verwendet werden. Bei ihnen ist der Momentenbeiwert c_M positiv.

Werden Profile mit positiver Profilwölbung f_{max} verwendet sind zur Erlangung der Stabilität Leitwerke notwendig.

11 Die Flugstabilität von zwei zusammenhängenden Flügeln

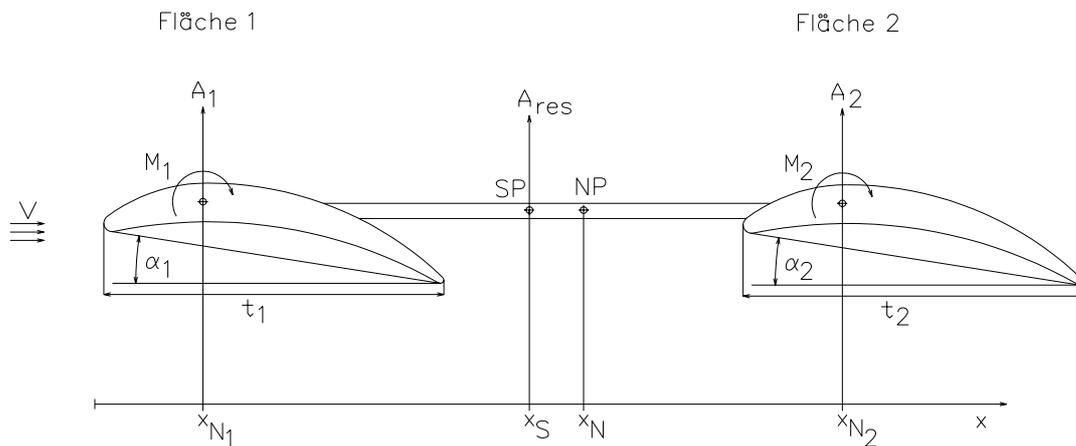


Bild 11.1: Schematische Darstellung des Flugzeuges

In Bild ist ein aus zwei Rechteckflügeln bestehendes Flugzeug skizziert. Es sind die Größen

Spannweite	b
Flügeltiefe	t
Anstellwinkel	α
Nullauftriebswinkel	α_0
Momentenbeiwert	c_M
Ort des Neutralpunktes	x_N

beider Flügel bekannt.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lage des Druckpunktes und des Neutralpunktes und die dimensionslose Neutralpunktsrücklage $x = \frac{x_N - x_S}{t_{\text{Hauptflügel}}}$ für die folgenden drei

Beispiele, siehe Bild 11.2.

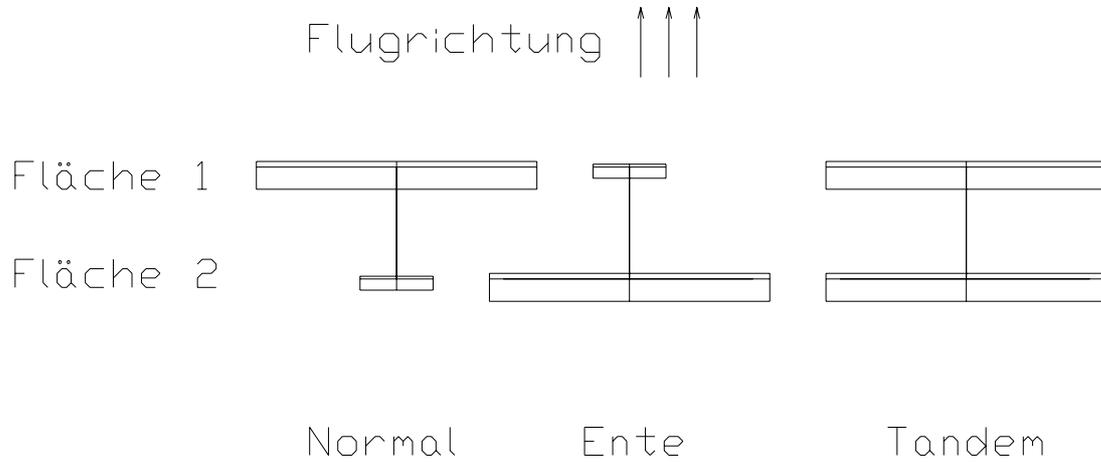


Bild 11.1: Schematische Darstellung der drei Flugzeugevarianten

Normal-Konfiguration:

	$b / (m)$	$S / (m^2)$	$\alpha / (Grad)$	$\alpha_0 / (Grad)$	c_M	x_N
Fläche 1	10	10	2	-4	-0.1	0
Fläche 2	2.5	1.25	0	0	0	4

Enten-Konfiguration:

	$b / (m)$	$S / (m^2)$	$\alpha / (Grad)$	$\alpha_0 / (Grad)$	c_M	x_N
Fläche 1	2.5	1.25	9	-4	-0.1	0
Fläche 2	10	10	2	-4	-0.1	4

Tandem-Konfiguration:

	$b / (m)$	$S / (m^2)$	$\alpha / (Grad)$	$\alpha_0 / (Grad)$	c_M	x_N
Fläche 1	10	10	4.5	-4	-0.1	0
Fläche 2	10	10	2	-4	-0.1	4

Lösungsweg:

Zuerst wird der Punkt berechnet, an dem die resultierende Kraft angreift. Um diesen Punkt ist das Drehmoment = 0.

$$A_1 \cdot (x_S - x_{N_1}) + M_1 - A_2 \cdot (x_{N_2} - x_S) + M_2 = 0 \quad (11.1)$$

Die darin enthaltenen Größen sind:

$$\text{Auftrieb der Fläche 1} \quad A_1 = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S_1 \cdot c_{A_1} \quad (11.2)$$

$$\text{Moment der Fläche 1} \quad M_1 = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S_1 \cdot t_1 \cdot c_{M_1} \quad (11.3)$$

$$\text{Auftrieb der Fläche 2} \quad A_2 = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S_2 \cdot c_{A_2} \quad (11.4)$$

$$\text{Moment der Fläche 2} \quad M_2 = \frac{\rho}{2} V^2 \cdot S_2 \cdot t_2 \cdot c_{M_2} \quad (11.5)$$

Darin sind die Auftriebsbeiwerte und die Momentenbeiwerte enthalten. Für ihre Ermittlung ist die Abhängigkeit von der Geometrie zu berechnen. Der Auftriebsbeiwert wird berechnet aus dem Anstellwinkel α , dem Nullauftriebswinkel α_0 und dem Anstieg $\frac{dc_A}{d\alpha}$. Dieser ist abhängig von der Streckung Λ , siehe Bild 8.6.

$$c_{A_1} = (\alpha_1 - \alpha_{0_1}) \frac{dc_A}{d\alpha} \Big|_1 \quad (11.6)$$

$$c_{A_2} = (\alpha_2 - \alpha_{0_2}) \frac{dc_A}{d\alpha} \Big|_2 \quad (11.7)$$

Für die Berechnung des Anstiges $\frac{dc_A}{d\alpha}$ ist es günstig nicht auf Tabellenwerte, sondern auf analytische Formeln zurückzugreifen. Dafür kann im Bereich $1 \leq \Lambda \leq 10$ der Zusammenhang 11.9 angegeben werden.

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 1.3 \cdot \ln(\Lambda) + 2.2 \quad (11.8)$$

Für die Berechnung der Momentenbeiwerte werden die Angaben aus Profilkatalogen genommen oder es wird die Gleichung 11.9 benutzt.

$$c_M = - \frac{\frac{f_{\max}}{(\%)} \cdot \left(\frac{x_f}{(\%)} - 16 \right)}{1000} \quad (11.9)$$

Mit den angegebenen Gleichungen kann die Lage des Druckpunktes ($M=0$) bestimmt werden.

$$x_S = \frac{A_1 \cdot x_{N_1} + A_2 \cdot x_{N_2} - M_1 - M_2}{A_1 + A_2} \quad (11.10)$$

An diese Stelle wird der Schwerpunkt gelegt. Jetzt wird der gesamte Aufbau rechnerisch um ein Grad steiler angestellt. Diese Berechnung ergibt einen neuen Druckpunkt. Die zwei erhaltenen Druckpunkte $x_{S_{0\text{ Grad}}}$ und $x_{S_{1\text{ Grad}}}$ sind geeignet um den Neutralpunkt zu berechnen. Von dem Neutralpunkt ist bekannt, daß dort das Moment unabhängig vom Anstellwinkel ist.

$$(A_1 + A_2)_{0\text{ Grad}} \cdot (x_N - x_{S_{0\text{ Grad}}}) = (A_1 + A_2)_{1\text{ Grad}} \cdot (x_N - x_{S_{1\text{ Grad}}}) \quad (11.12)$$

daraus kann der Ort des Neutralpunktes berechnet werden.

$$x_N = \frac{(A_1 + A_2)_{0\text{ Grad}} \cdot x_{S_{0\text{ Grad}}} - (A_1 + A_2)_{1\text{ Grad}} \cdot x_{S_{1\text{ Grad}}}}{(A_1 + A_2)_{0\text{ Grad}} - (A_1 + A_2)_{1\text{ Grad}}} \quad (11.13)$$

Aus diesem kann die dimensionslose Neutralpunktsrücklage $x = \frac{x_N - x_S}{t_{\text{Hauptflügel}}}$

berechnet werden. Sie ist ein Maß für die Stabilität des Fluggerätes. Im folgenden sind die drei Beispielberechnungen aufgelistet.

Rechenblatt Normal-Konfiguration:

			Fläche 1	Fläche 2
Spannweite	b	/ (m)	10,00	2,50
Flügelfläche	S	/ (m ²)	10,00	1,25
Streckung	Λ		10,00	5,00
mittlere Tiefe	t_m	/ (m)	1,000	0,500
Anstellwinkel	α	/ (Grad)	2,0	0,0
Nullauftriebswinkel aus Katalog	α_0	/ (Grad)	-4,0	0,0
Momentbeiwert aus Katalog	C_M		-0,10	0,00
Anstieg des Auftriebes als Funktion vom Anstellwinkel	$\frac{dc_A}{d\alpha}$	/ (1/rad)	5,193	4,292
Auftriebsbeiwert bei 0 Grad	$C_{A_{0\text{Grad}}}$		0,544	0,000
Position des Neutralpunktes der Fläche	x_N	/ (m)	0,00	4,00
Position des Druckpunktes bei 0 Grad	$x_{S_{0\text{Grad}}}$	/ (m)	0,184	
realer Auftriebsbeiwert bei 1 Grad	$C_{A_{1\text{Grad}}}$		0,634	0,075
Position des Druckpunktes bei 1 Grad	$x_{S_{1\text{Grad}}}$	/ (m)	0,213	
Position des Neutralpunktes des Flugzeuges	x_N	/ (m)	0,375	
Stabilitätsmaß bezogen auf die Fläche	x		0,191	0,381

Rechenblatt Enten-Konfiguration:

			Fläche 1	Fläche 2
Spannweite	b	/ (m)	2,50	10,00
Flügelfläche	S	/ (m ²)	1,25	10,00
Streckung	Λ		5,00	10,00
mittlere Tiefe	t_m	/ (m)	0,500	1,000
Anstellwinkel	α	/ (Grad)	9,0	2,0
Nullauftriebswinkel aus Katalog	α_0	/ (Grad)	-4,0	-4,0
Momentbeiwert aus Katalog	C_M		-0,10	-0,10
Anstieg des Auftriebes als Funktion vom Anstellwinkel	$\frac{dc_A}{d\alpha}$	/ (1/rad)	4,292	5,193
Auftriebsbeiwert bei 0 Grad	$C_{A_{0\text{Grad}}}$		0,974	0,544
Position des Neutralpunktes der Fläche	x_N	/ (m)	0,00	4,00
Position des Druckpunktes bei 0 Grad	$x_{S_{0\text{Grad}}}$	/ (m)	3,428	
realer Auftriebsbeiwert bei 1 Grad	$C_{A_{1\text{Grad}}}$		1,049	0,634
Position des Druckpunktes bei 1 Grad	$x_{S_{1\text{Grad}}}$	/ (m)	3,454	
Position des Neutralpunktes des Flugzeuges	x_N	/ (m)	3,625	
Stabilitätsmaß bezogen auf die Fläche	x		0,395	0,197

Rechenblatt Tandem-Konfiguration:

			Fläche 1	Fläche 2
Spannweite	b	/ (m)	10,00	10,00
Flügelfläche	S	/ (m ²)	10,00	10,00
Streckung	Λ		10,00	10,00
mittlere Tiefe	t_m	/ (m)	1,000	1,000
Anstellwinkel	α	/ (Grad)	4,5	2,0
Nullauftriebswinkel aus Katalog	α_0	/ (Grad)	-4,0	-4,0
Momentbeiwert aus Katalog	C_M		-0,10	-0,10
Anstieg des Auftriebes als Funktion vom Anstellwinkel	$\frac{dc_A}{d\alpha}$	/ (1/rad)	5,193	5,193
Auftriebsbeiwert bei 0 Grad	$C_{A_{0\text{ Grad}}}$		0,770	0,544
Position des Neutralpunktes der Fläche	x_N	/ (m)	0,00	4,00
Position des Druckpunktes bei 0 Grad	$x_{S_{0\text{ Grad}}}$	/ (m)	1,807	
realer Auftriebsbeiwert bei 1 Grad	$C_{A_{1\text{ Grad}}}$		0,861	0,634
Position des Druckpunktes bei 1 Grad	$x_{S_{1\text{ Grad}}}$	/ (m)	1,831	
Position des Neutralpunktes des Flugzeuges	x_N	/ (m)	2,000	
Stabilitätsmaß bezogen auf die Fläche	x		0,193	0,193

Diskussion:

In den drei Rechenblättern sind die Zwischenergebnisse und Ergebnisse der Varianten 'Normal', 'Ente' und 'Tandem' aufgezeigt. Es ist zu erkennen, daß die verwendeten Einstellwinkel so gewählt wurden, daß bei allen Konfigurationen sich etwa das gleiche Stabilitätsmaß, bezogen auf die tragende Fläche, ergibt. Eine Abweichung von den vorgeschlagenen Winkeln führt zu einem instabilen Flug oder zu großen Stabilitätsreserven, die wiederum zu schlechteren Flugleistungen führen können.

Bei der Enten-Konfiguration muß die Fläche 1 sehr steil angestellt werden. Diesen großen Anstellwinkel kann man oft schon auf Fotos erkennen. Bei der Tandem-Konfiguration kommt es darauf an, daß die vordere Tragfläche immer etwas steiler angestellt wird. Aus Modellversuchen ist bekannt, daß eine Mindstdifferenz von 2 Grad notwendig ist. Die hier vorgestellte Berechnung untermauert diese Zahl. Der Neutralpunkt des Flugzeuges befindet sich erwartungsgemäß in der Mitte der beiden gleichen Flächen. Damit der Druckpunkt vor dem Neutralpunkt liegen kann, muß die vordere Fläche steiler angestellt werden.

12 Die Potentialtheorie

Gegeben ist eine Potentialfunktion, siehe Gleichung 12.1.

$$\Phi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (12.1)$$

Aufgabe:

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung!
- Geben Sie die Stromfunktion an!
- Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit?
- Skizzieren Sie die Linien konstanter Potentialfunktion, konstanter Stromfunktion und konstanter Geschwindigkeit!
- Nennen Sie ein technisches Beispiel für diese Strömungsform!

Lösungsweg:

- a) Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten ist die Potentialfunktion abzuleiten.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (12.2)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (12.3)$$

$$u = 1 + \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (12.4)$$

$$v = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (12.5)$$

b) Die Stromfunktion ist durch Integration der Geschwindigkeiten bestimmbar.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (12.6)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (12.7)$$

Damit ist die Stromfunktion bis auf die Integrationskonstante K beschrieben.

$$\Psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} + K \quad (12.8)$$

c) Der Geschwindigkeitsbetrag wird aus den beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v berechnet.

$$|c| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (12.9)$$

d) Die Linien konstanter Potentialfunktion, konstanter Stromfunktion und konstanter Geschwindigkeit sind im Bild 12.1 dargestellt.

Potentialfunktion = const.

Stromfunktion = const.

Geschwindigkeit = const.

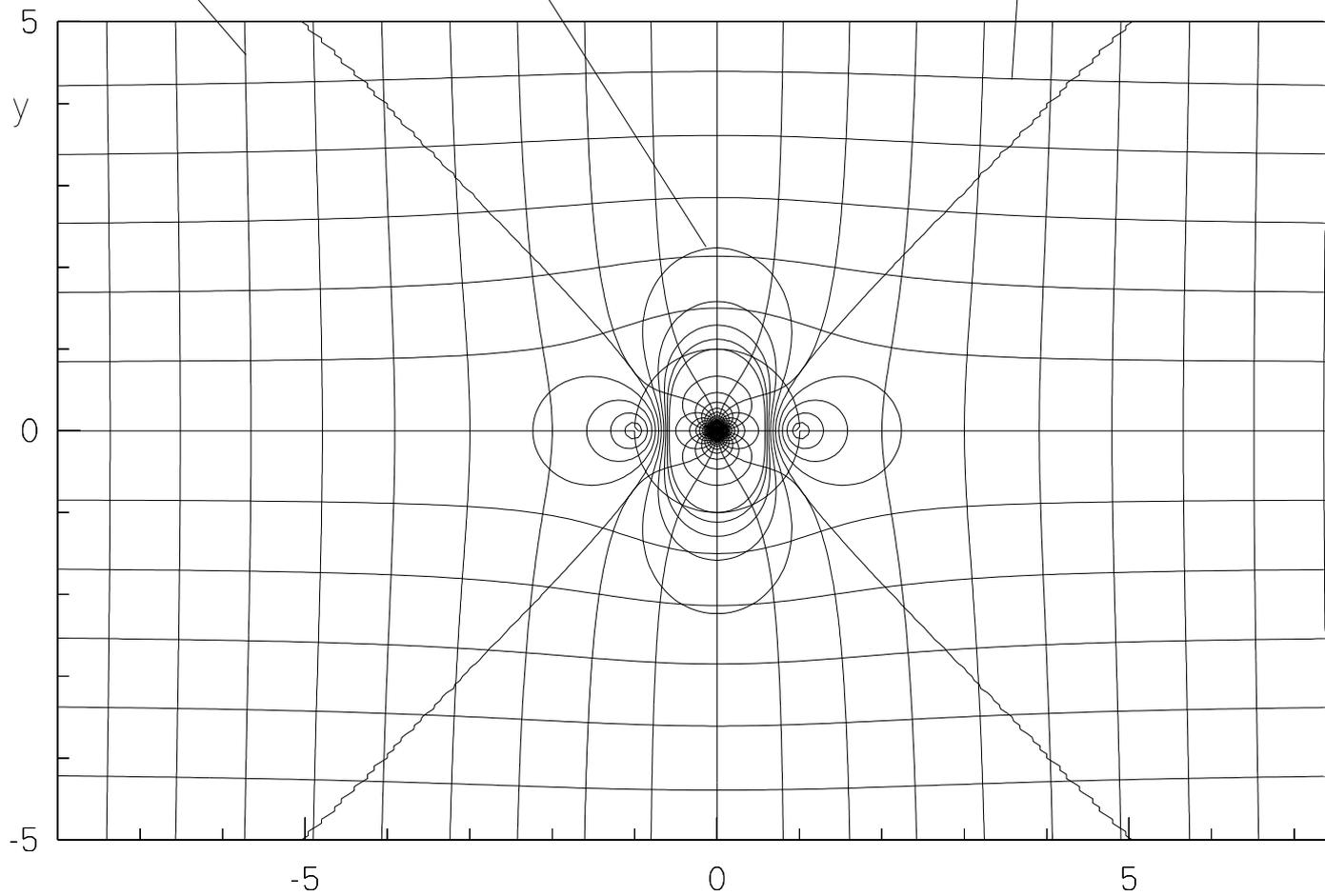


Bild 12.1: Graphische Darstellung der Isolinien

e) Ein technisches Beispiel für diese Strömungsform ist die Umströmung eines Zylinders.

13 Konforme Abbildung und die Joukowski-Profile

Im Koordinatensystem der z -Ebene (x,y) befindet sich ein Zylinder mit dem Radius $r_z = \sqrt{37}$ m und den Mittelpunktskoordinaten $x_z = -1$ m und $y_z = 1$ m. Die Anordnung wird von einem Parallelstrahl mit der Geschwindigkeit $v_\infty = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und einem Neigungswinkel von $\alpha = 10$ Grad angeströmt. Weiterhin befindet sich in der Mitte des Zylinders ein Potentialwirbel mit der Wirbelstärke Γ . Die Geometrie und die Umströmung kann in die ξ -Ebene (η,ζ) übertragen werden. Die Transformation wird mit den Gleichungen 13.1 und 13.2 durchgeführt.

$$\zeta = x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (13.1)$$

$$\eta = y \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (13.2)$$

Aufgaben:

- Stellen sie den Zylinder in der z -Ebene und der ξ -Ebene dar!
- Bestimmen sie die Strömfunktion und die Potentialfunktion in der z -Ebene!
- Bei welcher Wirbelstärke Γ_0 verschwindet die resultierende Geschwindigkeit an der Hinterkante des Profils?
- Stellen sie die Linien konstanter Stromfunktion und konstanter

Geschwindigkeit in der z-Ebene und der ξ -Ebene für $\Gamma = 0$ und für $\Gamma = \Gamma_0$ dar!

Lösungsweg:

a)

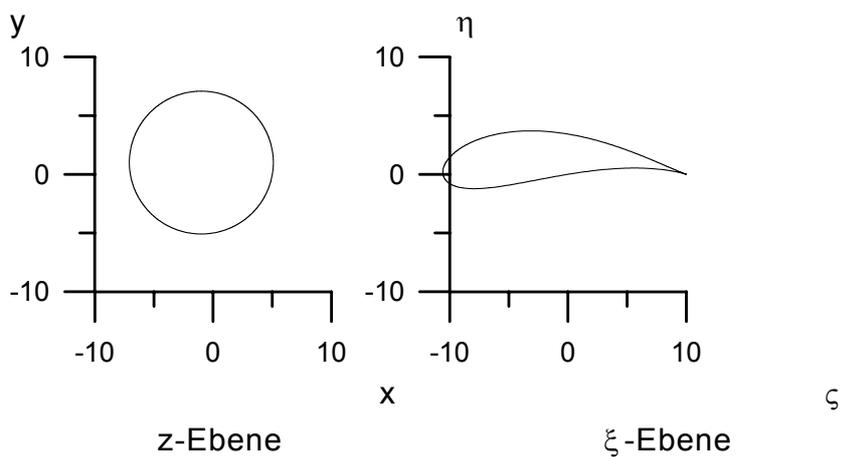


Bild 13.1: Darstellung der Kontur in der z-Ebene und der ξ -Ebene

$$b) \quad \theta = v_\infty \cdot r \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(1 + \frac{r_z^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \varphi \quad (13.3)$$

$$\Psi = -v_\infty \cdot r \cdot \sin(\varphi) \cdot \left(1 - \frac{r_z^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \quad (13.4)$$

Der Radius r und der Winkel φ sind berechenbar aus dem Zusammenhang:

$$r = \sqrt{(x - x_z)^2 + (y - y_z)^2} \quad (13.5)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y - y_z}{x - x_z}\right) - \alpha \quad (13.6)$$

wenn $[(x - x_z) < 0]$ dann $\varphi := \varphi + \pi$

c) Bei $\Gamma_0 = 25.47$ verschwindet die resultierende Geschwindigkeit an der Hinterkante des Profils.

d) In den folgenden Bildern ist die Strömung dargestellt.

Die Konforme Abbildung und die Joukowski-Profil

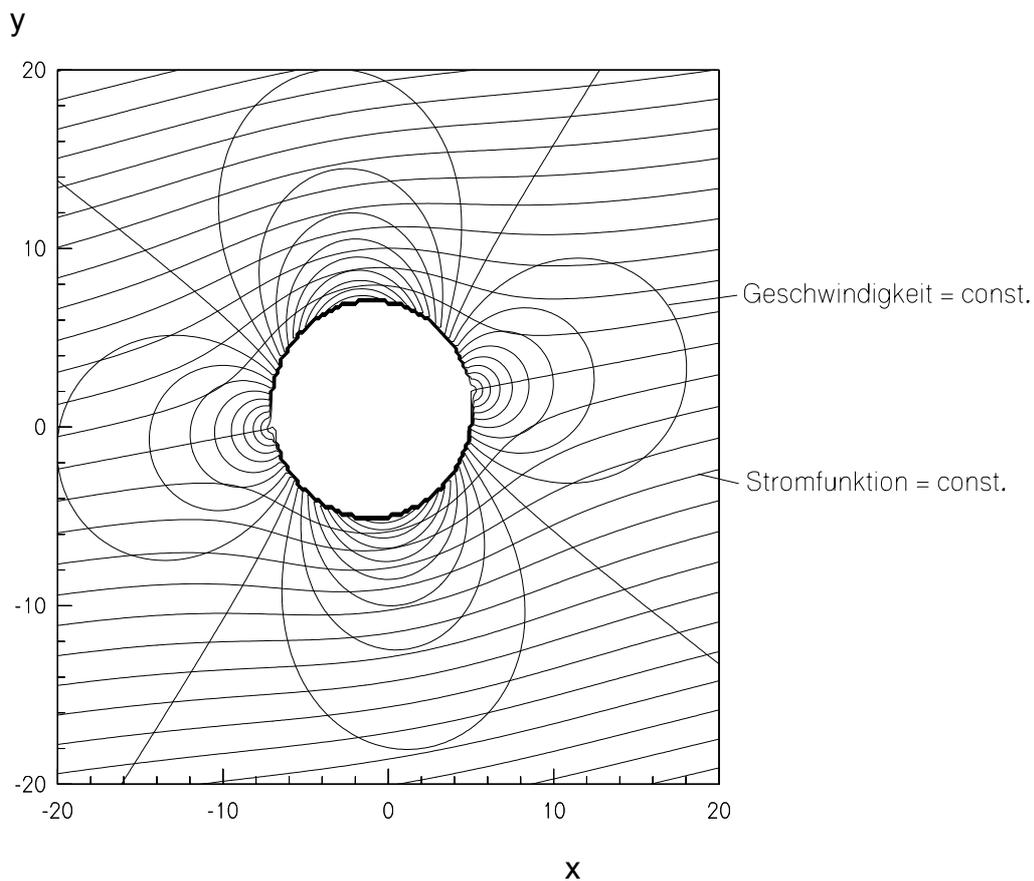


Bild 13.2: Darstellung der Umströmung in der z-Ebene bei $\Gamma = 0$

η

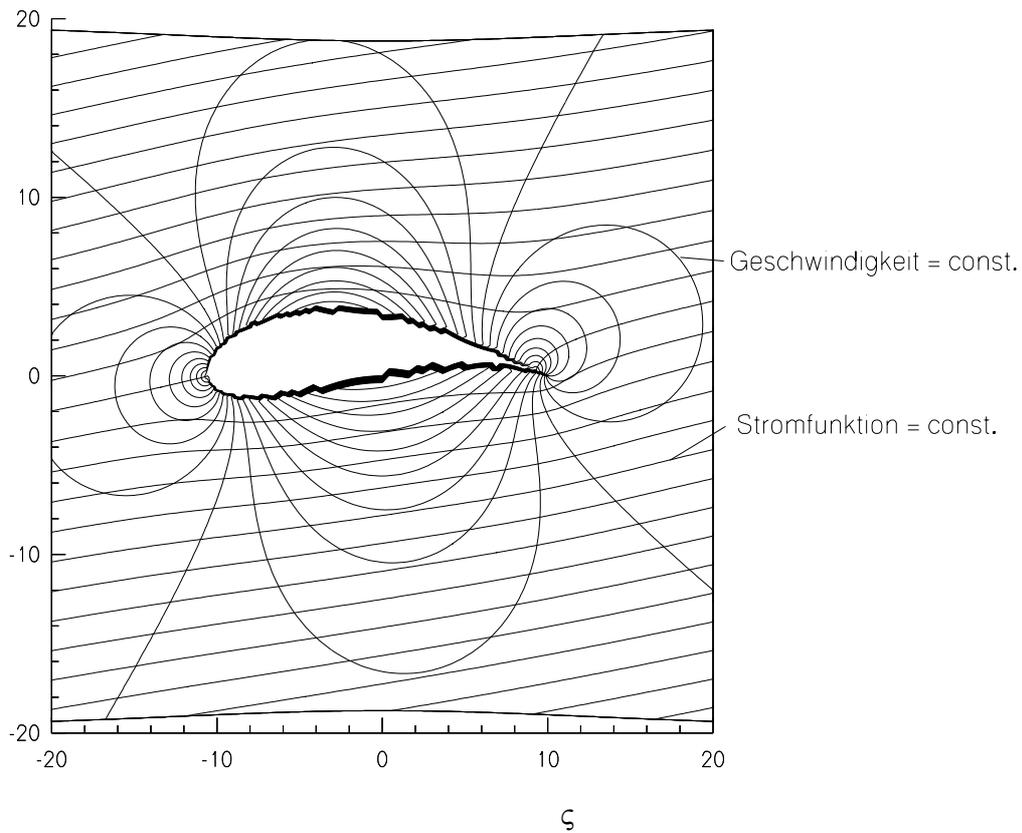


Bild 13.3: Darstellung der Umströmung in der ξ -Ebene bei $\Gamma = 0$

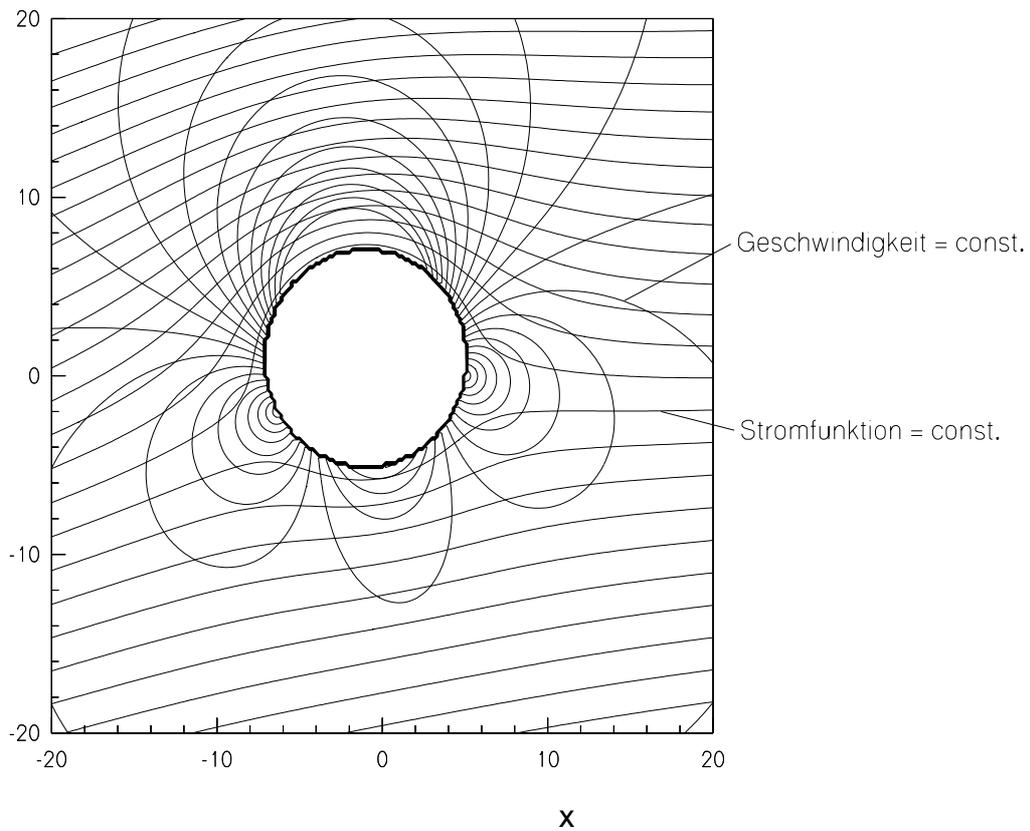


Bild 13.4: Darstellung der Umströmung in der z -Ebene bei $\Gamma = \Gamma_0 = 25.47$

η

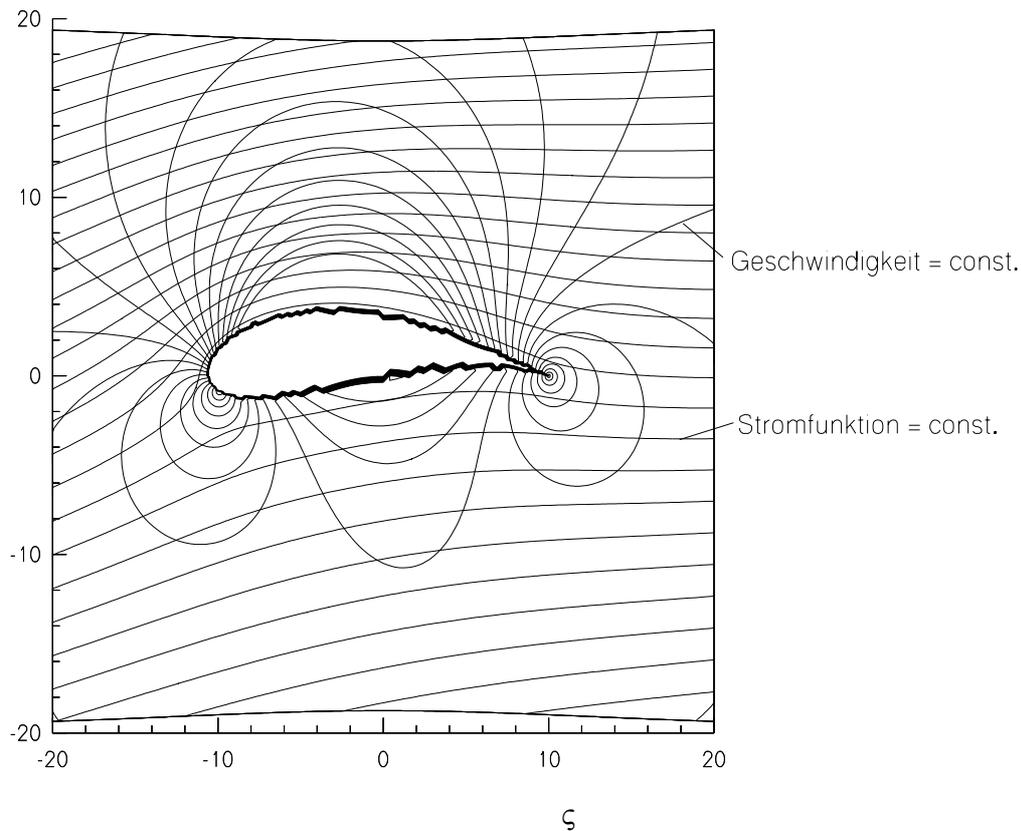


Bild 13.5 Darstellung der Umströmung in der ξ -Ebene bei $\Gamma = \Gamma_0 = 25.47$

Literaturverzeichnis

Albring: Angewandte Strömungslehre. Akademie-Verlag, Berlin, 1990

Schlichting: Grenzschichttheorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1958

Brünicg, Hafer: Flugleistungen, Grundlagen, Flugzustände, Flugabschnitte.
Springer Verlag

Hafer, Sachs: Flugmechanik, Moderne Flugentwurfs- und Steuerungstechnik.
Springer Verlag

Thomas: Grundlagen für den Entwurf von Segelflugzeugen Motorbuch Verlag
Stuttgart

Althaus: Stuttgarter Profilkatalog. Vieweg-Verlag, 1996

Althaus: Niedriggeschwindigkeitsprofile. Vieweg-Verlag, 1996

Urlaub: Flugtriebwerke. Springer Verlag, 1995

Schlichting: Aerodynamik des Flugzeuges, Band 1 und 2. Springer Verlag, 1969

Nakayama: Fantasy of Flow. IOS Press, 1993

Kopenhagen: Flugzeugtypenbuch. Transpress-Verlag, 1987