

Lösung Aufgabe 1.1:**Gegeben:**

Rohrleitung	$d_i = 40 \text{ mm}$, $b = 0,4 \text{ m}$
Wasserstrom	$\dot{V} = 1,5 \text{ m}^3/\text{h}$, $t_E = 8 \text{ }^\circ\text{C}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4,18 \text{ kJ/(kg K)}$
	$\alpha_i = 2000 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, $t_A = 15 \text{ }^\circ\text{C}$
Erdreich	$\lambda = 1,7 \text{ W/(m K)}$
Umgebung	$t_U = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_a = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
Isolierung	$\delta_{Is} = 2 \text{ cm}$, $\lambda_{Is} = 0,05 \text{ W/(m K)}$

Gesucht: Verlegelänge L

Die Temperatur des Wassers ändert sich mit der Rohrlänge, und aus diesem Grunde muss für den Wärmedurchgang die mittlere Temperaturdifferenz Verwendung finden

$$\dot{Q} = \frac{\Delta t_m}{R_k}$$

Der zugeführte Wärmestrom ist nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik gleich der Erhöhung des Enthalpiestromes

$$\dot{Q} = \dot{H}_A - \dot{H}_E = \rho \dot{V} c_p (t_A - t_E)$$

Für die mittlere Temperaturdifferenz gilt

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_E - \Delta t_A}{\ln \frac{\Delta t_E}{\Delta t_A}} = \frac{t_A - t_E}{\ln \frac{t_U - t_E}{t_U - t_A}}$$

Der Wärmedurchgangswiderstand ist bekanntlich

$$R_k = R_{\alpha,i} + R_\lambda + R_{\alpha,a}$$

Dabei ist der Wärmeübergangswiderstand innen

$$R_{\alpha,i} = \frac{1}{2 \pi r L \alpha_i}$$

und der Wärmeleitwiderstand nach dem Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S. 11 (Fall: Rohr im Erdboden)

$$R_\lambda = \frac{\operatorname{arcosh} \frac{b}{r}}{2 \pi \lambda L}$$

Dieser Wärmeleitwiderstand bezieht sich entsprechend der Definition auf eine konstante Erdoberflächentemperatur. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht exakt erfüllt, da an der Erdoberfläche ein Wärmeübergang vorhanden ist. Außerdem lässt sich für den vorliegenden Fall der äußere Wärmeübergangswiderstand nicht formulieren, da die wärmeübertragende Fläche nicht bekannt ist. Das Problem ist nur lösbar, wenn der Wärmeübergangswiderstand zur Umgebung in einen äquivalenten Wärmeleitwiderstand für eine zusätzliche Erdschicht umgerechnet wird. Für die äquivalente Schichtstärke gilt

$$\delta_{\text{äqu}} = \frac{\lambda}{\alpha_a}$$

Um diese Stärke $\delta_{\text{äqu}}$ muss die Verlegetiefe rechnerisch vergrößert werden, d. h., es muss mit

$$b_{\text{äqu}} = b + \delta_{\text{äqu}} = b + \frac{\lambda}{\alpha_a} = 0,4 \text{ m} + \frac{1,7 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}} = 0,74 \text{ m}$$

gerechnet werden.

Die Wand der Rohrleitung wird vernachlässigt, so dass näherungsweise für $r = d_i / 2$ gesetzt werden kann.

Für die gesuchte Länge folgt mit $R_{\alpha,a} = 0$

$$L = \frac{\rho \dot{V} c_p \ln \frac{t_U - t_E}{t_U - t_A} \left(\frac{1}{r \alpha_i} + \frac{\text{arcosh} \frac{b_{\text{äqu}}}{r}}{\lambda} \right)}{2 \pi}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$L = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot \ln \frac{20-8}{20-15} \left(\frac{1}{0,02 \text{ m} \cdot 2000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}} + \frac{\text{arcosh} \frac{0,74}{0,02}}{1,7 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} \right)}{3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{s}}{\text{h}} \cdot 2 \cdot \pi}$$

$$L = 620,4 \text{ m.}$$

Aus dem Ergebnis ist zu entnehmen, dass sich bei langen in geringer Tiefe verlegten Wasserleitungen das Wasser merklich aufwärmt.

Um die Abkühlung des Wassers zu verringern, wird um das Rohr eine Isolierung angebracht. Der gesamte Widerstand ergibt sich damit aus

$$R_k = R_{\alpha,i} + R_{\lambda,Is} + R_{\lambda} + R_{\alpha,a}$$

Der zusätzliche Widerstand durch die Isolierung beträgt

$$R_{\lambda,Is} = \frac{1}{2 \pi L \lambda_{Is}} \ln \frac{d_i + 2 \delta_{Is}}{d_i} = \frac{1}{2 \pi L \lambda_{Is}} \ln \frac{r + \delta_{Is}}{r}$$

Auf Grund der Isolierung ändert sich der Widerstand der Erdschicht (größerer Durchmesser des Rohres)

$$R_{\lambda} + R_{\alpha,a} = \frac{1}{2 \pi \lambda L} \operatorname{arccosh} \left(\frac{b_{\text{äqu}}}{r + \delta_{Is}} \right)$$

Für das isolierte Rohr ergibt sich eine Verlegelänge von

$$L_2 = \frac{\rho \dot{V} c_p \ln \frac{t_U - t_E}{t_U - t_A}}{2 \pi} \left(\frac{1}{r \alpha_i} + \frac{1}{\lambda_{Is}} \ln \frac{r + \delta_{Is}}{r} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \frac{b_{\text{äqu}}}{r + \delta_{Is}} \right)$$

$$L_2 = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 1,5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \ln \frac{20 - 8}{20 - 15}}{3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{s}}{\text{h}} 2 \pi}$$

$$\left(\frac{1}{0,02 \text{ m } 2000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}} + \frac{1}{0,05 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} \ln \frac{0,02 + 0,02}{0,02} + \frac{1}{1,7 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} \operatorname{arccosh} \frac{0,74}{0,02 + 0,02} \right)$$

$$L_2 = 3885,6 \text{ m}$$

Der Widerstand $R_{\lambda,Is}$ ist der deutlich größte. Die obige Anwendung der Methode des Formkoeffizienten für den Widerstand des Erdreiches ist deshalb nur näherungsweise möglich, da die Bedingung einer konstanten Oberflächentemperatur auf der Isolierung nicht mehr gegeben ist. Auf Grund der unterschiedlichen Wärmestromdichten am Rohrumfang (nach oben sind die Wärmestromdichten viel größer als nach unten) ist der Temperaturabfall über die Isolierung nicht konstant.

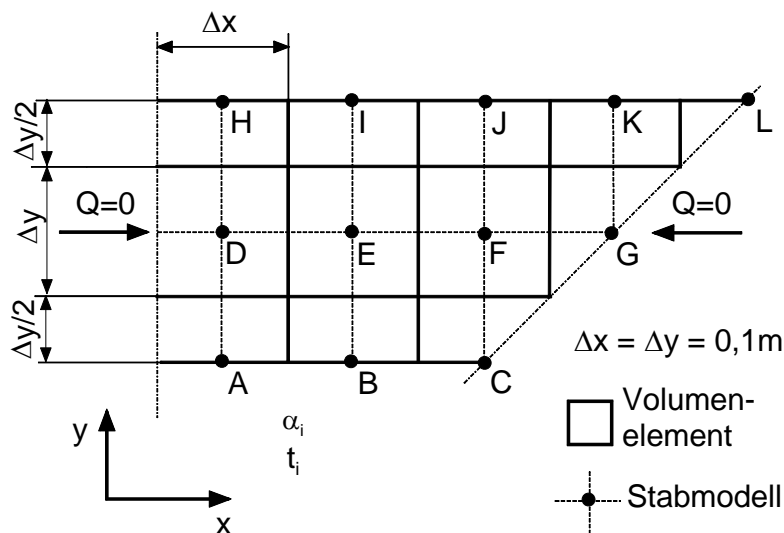
Lösung Aufgabe 1.3:

Gegeben: Abgaskanal 0,5 m x 0,5 m, $\delta = 0,2$ m, $\Delta x = \Delta y = 0,1$ m
 $\lambda = 1$ W/(m K), $t_{w,a} = 50$ °C

Rauchgase $t_i = 200$ °C, $\alpha_i = 50$ W/(m² K)

Gesucht: a) Temperaturfeld, b) abgegebener Wärmestrom pro m Kanallänge,
 c) \dot{Q}/l bei Rechnung mit Formkoeffizient

Diskretisierung der Kanalwand



Aus Symmetriegründen wird nur 1/8 der Kanalwand betrachtet. Über die Symmetrieachsen geht kein Wärmestrom. Die Einteilung der Kanalwand erfolgt in Volumenelemente (VE), wobei halbe VE an die Wand gelegt werden. Die Gitterpunkte auf der Wandoberfläche erlauben eine einfache Anwendung der Randbedingungen.

Die Bildung der VE kann auch anders erfolgen, z. B. halbe VE links an der Symmetrieachse anordnen.

a) Aufstellung der Berechnungsgleichungen für die Punkte A bis G nach der Energiebilanz:
 $\Sigma \dot{Q} = 0$

$$A: \alpha \Delta x L (t_i - t_A) + \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L (t_D - t_A) + \frac{\lambda}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} L (t_B - t_A) = 0$$

$$B: \alpha \Delta x L (t_i - t_B) + \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L (t_E - t_B) + \frac{\lambda}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} L (t_A - t_B) + \frac{\lambda}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} L (t_C - t_B) = 0$$

$$C: \alpha \frac{\Delta x}{2} L (t_i - t_C) + \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L (t_F - t_C) + \frac{\lambda}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} L (t_B - t_C) = 0$$

$$D: \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L [(t_A - t_D) + (t_H - t_D)] + \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L (t_E - t_D) = 0$$

$$E: \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L [(t_I - t_E) + (t_B - t_E)] + \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L [(t_D - t_E) + (t_F - t_E)] = 0$$

$$F: \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L [(t_J - t_F) + (t_C - t_F)] + \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L [(t_E - t_F) + (t_G - t_F)] = 0$$

$$G: \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L (t_K - t_G) + \frac{\lambda}{\Delta x} \Delta y L (t_F - t_G) = 0$$

Für die Punkte H bis L brauchen keine Gleichungen aufgestellt zu werden, da die Temperatur an diesen Punkten gegeben ist.

Das Einsetzen der gegebenen Werte ergibt 7 Gleichungen mit 7 unbekanntem Temperaturen.

- (1) $200 + 0,2 t_D + 0,1 t_B - 1,3 t_A = 0$
- (2) $200 + 0,2 t_E + 0,1 t_C + 0,1 t_A - 1,4 t_B = 0$
- (3) $100 + 0,2 t_F + 0,1 t_B - 0,8 t_C = 0$
- (4) $50 + t_A + t_E - 3 t_D = 0$
- (5) $50 + t_B + t_F + t_D - 4 t_E = 0$
- (6) $50 + t_C + t_G + t_E - 4 t_F = 0$
- (7) $50 + t_F - 2 t_G = 0$

1. Lösung durch Eliminationsverfahren

Das Eliminationsverfahren ist ein direktes Lösungsverfahren, wobei vorteilhaft eine kommerzielle Software zur Lösung von linearen Gleichungssystemen verwendet wird. Bei der Handrechnung ergibt sich

- | | | |
|----------------------------|--|------|
| aus (7) | $t_G = 25 + 0,5 t_F$ | (8) |
| aus (6) mit (8) | $t_F = 21,42857 + 1/3,5 (t_C + t_E)$ | (9) |
| aus (5) mit (9) | $t_E = 19,23077 + 0,26923 (t_B + t_D) + 0,076923 t_C$ | (10) |
| aus (4) mit (10) | $t_D = 25,35210 + 0,36619 t_A + 0,098591 t_B + 0,028168 t_C$ | (11) |
| aus (3) mit (9),(10) | $t_C = 143,32044 + 0,156546 t_B + 0,00763331 t_A$ | (12) |
| aus (2) mit (12),(10),(11) | $t_B = 167,83216 + 0,091194 t_A$ | (13) |
| aus (1) mit (13),(11),(12) | $t_A = 186,0 \text{ °C}$ | |
| aus (13) | $t_B = 184,825 \text{ °C}$ | |
| aus (12) | $t_C = 174,016 \text{ °C}$ | |
| aus (11) | $t_D = 116,589 \text{ °C}$ | |
| aus (10) | $t_E = 113,767 \text{ °C}$ | |
| aus (9) | $t_F = 103,652 \text{ °C}$ | |
| aus (8) | $t_G = 76,826 \text{ °C}$ | |

Bei diesem Lösungsverfahren (Gaußscher Algorithmus) werden die Unbekannten schrittweise eliminiert. Beginnend mit Gl.(7) werden alle Gleichungen nacheinander eingesetzt. Nachdem t_A erhalten wurde, können alle anderen Unbekannten berechnet werden. Es ist mit vielen Zahlenstellen zu arbeiten, da sich Rundungsfehler vergrößern.

Die obigen Ergebnisse sind die exakte Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungen enthalten aber die Diskretisierungsfehler (Fehler infolge der Bildung von endlich großen Volumenelementen).

Bei der Verwendung von Mathcad zur Lösung des Gleichungssystems stehen verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl:

1. Lösung mit dem Matrizenverfahren

Dabei werden die Matrix A mit den Koeffizienten vor den unbekanntem Temperaturen und der Restvektor C mit den bekannten Temperaturen (vorher auf rechte Seite der Gleichung gebracht) erstellt und der Temperaturvektor mit den gesuchten Werten mit dem Aufruf

$$T := A^{-1} \cdot C$$

oder mit dem Befehl

$$T := \text{llösen}(A, C)$$

ermittelt.

2. Lösung mit Befehl „suchen“ oder „minfehl“

Für die unbekanntem Temperaturen sind Startwerte vorzugeben. Nach dem Aufruf Vorgabe ist das Gleichungssystem (mit Booleschen Operatoren geschrieben) einzugeben.

Der Befehl suchen (ta, tb, ...) =

bzw. minfehl (ta, tb, ...) =

liefert die gesuchten Temperaturen. Diese Befehle können auch bei nichtlinearen Gleichungen angewendet werden. Der Aufruf „minfehl“ liefert auch Ergebnisse, wenn keine exakte Lösung des Gleichungssystems gefunden werden kann.

2. Iterative Lösung

Bei dem iterativen Verfahren werden ausgehend von sinnvollen Startwerten die unbekanntem Temperaturen schrittweise verbessert.

Die Startwerte für das Iterationsverfahren können aus einer eindimensionalen Rechnung des Wärmedurchgangs durch die Kanalwand ermittelt werden.

$$\hat{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{t_i - t_{W,i}}{\frac{1}{\alpha_i}} = \frac{t_i - t_{W,a}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda}}$$

Für die Innenwand (t_A bis t_C) erhält man

$$t_{W,i} = t_i - \frac{1}{\alpha_i} \frac{t_i - t_{W,a}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda}} = 186,364 \text{ °C}$$

und für die Temperatur in der Mittelschicht (t_D bis t_G)

$$\frac{t_{w,a} + t_{w,i}}{2} = \frac{50 + 186,4}{2} \text{ °C} = 118,182 \text{ °C}$$

2.1 Jacobi-Verfahren

Die Gln.(1) bis (7) werden nach der letzten Temperatur (Mittelpunkt des Stabmodells) umgestellt, z. B.

$$\text{aus (1)} \quad t_A^{(i+1)} = \frac{1}{1,3} (200 + 0,2 t_D^{(i)} + 0,1 t_B^{(i)})$$

$$\text{aus (2)} \quad t_B^{(i+1)} = \frac{1}{1,4} (200 + 0,2 t_E^{(i)} + 0,1 t_C^{(i)} + 0,1 t_A^{(i)})$$

usw.

Auf der rechten Seite der Gleichungen stehen nur alte Iterationswerte (i) (i Nr. des Iterationsschrittes).

Darstellung der ersten drei Iterationswerte und der Fehler zur exakten Lösung des Gleichungssystems:

118,182	+1,593	115,366	+1,60	107,529	+3,876	78,764	+1,938
118,182		118,182		107,529		84,091	
118,182		118,182		118,182		84,091	
118,182		118,182		118,182		118,182	
	D		E		F		G
186,317	+0,317	185,755	+0,930	175,101	+1,085		
186,364		185,755		177,841			
186,364		186,364		177,841			
186,364		186,364		186,364			
	A		B		C		

Die Störung (Fehler) bei C und G breitet sich nur langsam aus. Die Werte ändern sich nur nach jedem 2. Iterationsschritt.

2.2 Gauß-Seidel-Verfahren

Berechnungsgleichungen bei Rechenablauf G --> D, C --> A

$$t_G^{(i+1)} = \frac{1}{2} (50 + t_F^{(i)})$$

$$t_F^{(i+1)} = \frac{1}{4} (50 + t_C^{(i)} + t_G^{i+1} + t_E^{(i)})$$

$$t_E^{(i+1)} = \frac{1}{4} (50 + t_B^{(i)} + t_F^{(i+1)} + t_D^{(i)})$$

usw.

Auf der rechten Seite stehen stets die aktuellen (zuletzt berechneten) Werte.

116,693	+0,104	114,019	+0,253	104,188	+0,536	77,699	+0,873
116,905		114,542		105,398		79,830	
117,472		116,051		109,659		84,091	
118,182		118,182		118,182		118,182	
	D		E		F		G
186,02	0,02	184,876	+0,051	174,170	+0,154		
186,061		184,983		174,512			
186,172		185,298		175,710			
186,364		186,364		186,364			
	A		B		C		

Nach 3 Iterationsschritten wird eine recht gute Annäherung an die exakten Werte erreicht. Der Fehler ist bei C, G und F am größten.

Berechnungsgleichungen bei Rechenablauf A --> C, D --> G

$$t_A^{(i+1)} = \frac{1}{1,3} (200 + 0,2 t_D^{(i)} + 0,1 t_B^{(i)})$$

$$t_B^{(i+1)} = \frac{1}{1,4} (200 + 0,2 t_E^{(i)} + 0,1 t_C^{(i)} + 0,1 t_A^{(i+1)})$$

usw.

117,938	+1,349	115,122	+1,355	104,632	+0,980	77,316	+0,490
118,182		117,497		106,939		78,469	
118,182		118,182		116,051		83,026	
118,182		118,182		118,182		118,182	
	D		E		F		G
186,317	+0,317	185,610	+0785	174,936	+0,920		
186,364		185,755		177,232			
186,364		186,364		177,841			
186,364		186,364		186,364			
	A		B		C		

Da sich die Fehler bei C und G nur langsam nach links auswirken, sind die linken Werte schlechter als bei dem anderen Rechenablauf (G --> A).

2.3 sukzessive Überrelaxation

Es ist sehr wichtig, einen optimalen Relaxationsfaktor zu ermitteln. Für eine Rechteckfläche gilt

$$\left(\frac{K}{4}w\right)^2 - w + 1 = 0$$

Mit

$$K = \cos \frac{\pi}{N} + \cos \frac{\pi}{M} = 1,207$$

N = 4 Anzahl der Punkte in x – Richtung

M = 3 Anzahl der Punkte in y-Richtung

wird

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{K}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{4}{K}\right)^4 - \left(\frac{4}{K}\right)^2} = \frac{10,98}{2} - \sqrt{\left(\frac{10,98}{2}\right)^2 - 10,98} = 1,11$$

Rechenablauf G --> D, C --> A

$$t_G^{(i+1)} = t_G^{(i)} + w \frac{R_G}{2}, \quad R_G = 50 + t_F^{(i)} - 2 t_G^{(i)}$$

$$t_F^{(i+1)} = t_F^{(i)} + w \frac{R_F}{4}, \quad R_F = 50 + t_C^{(i)} + t_E^{(i)} + t_G^{(i+1)} - 4 t_F^{(i)}$$

↙ ↘
stets selber Faktor

usw.

116,59	0,001	113,775	0,009	103,696	0,044	76,889	0,063
116,604		113,904		104,131		78,676	
117,104		115,268		107,681		80,341	
118,182		118,182		118,182		118,182	
	D	E		F		G	
186,00	0,000	184,823	-0,002	174,016	0,000		
185,999		184,852		174,165			
186,056		184,920		173,989			
186,364		186,364		186,364			
	A	B		C			

Man erhält sehr gute Ergebnisse nach 3 Iterationsschritten.

Ergebnisse für Temperaturen (in °C) in Tabellenform (nach 3 Iterationsschritten)

Pkt.	Eliminationsverfahren	Jacobi	Gauß G --> A	Seidel A --> G	sukzessive Überrelaxation G --> A
A	186,0	186,317	186,02	186,317	186,0
B	184,825	185,755	184,876	185,610	184,823
C	174,016	175,101	174,170	174,936	174,016
D	116,589	118,182	116,693	117,938	116,59
E	113,767	115,366	114,019	115,122	113,775
F	103,652	107,528	104,188	104,632	103,696
G	76,826	78,764	77,699	77,316	76,889
Δt_{\max}	in K	+3,876	+0,873	+1,355	+0,063
$\bar{\Delta t}$	in K	1,62	0,284	0,885	0,017

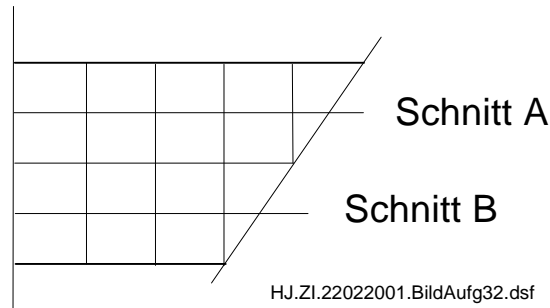
Zur Kennzeichnung der Güte der Iterationsverfahren wird die maximale absolute Abweichung Δt_{\max} und die mittlere Abweichung $\bar{\Delta t}$ (Summe der absoluten Abweichungen geteilt durch die Anzahl der Punkte) angegeben. Die sukzessive Überrelaxation liefert das beste Ergebnis. Bei den anderen Iterationsverfahren werden mehr Iterationsschritte benötigt, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen. Aus dem Vergleich mit dem Startwert (dafür gilt $\Delta t_{\max} = 41,356$ K, $\bar{\Delta t} = 10,878$ K) erkennt man, dass insbesondere das Gauß-Seidel-Verfahren (von G \rightarrow A) und die sukzessive Überrelaxation sehr effektiv arbeitende Verfahren sind.

Die iterative Berechnung kann vorteilhaft mit Excel erfolgen. Dabei sind Startwerte vorzugeben und die Berechnungsgleichungen in der gewünschten Reihenfolge zu programmieren. Excel berechnet die Zellen zeilenweise von oben nach unten. Insbesondere bei feiner Diskretisierung mit vielen VE bietet es sich an, die Anordnung der VE analog auf das Excelblatt zu übertragen, da durch Kopieren vieler ähnlicher VE der manuelle Aufwand minimiert werden kann. Es ist unbedingt zu beachten, dass ein Steuerparameter (z. B. 1 für Start und 2 für Rechnung) verwendet wird, damit die zu berechnenden Zellen immer wieder mit dem Startwert belegt werden können (mit Wenn arbeiten). Beim Gauß-Seidel-Verfahren und bei der sukzessiven Überrelaxation ist jeweils nur eine Zelle für ein VE notwendig, da der alte Wert durch den berechneten überschrieben wird. Beim Jacobi-Verfahren sind 2 Felder mit den alten und neuen Temperaturen notwendig. Der iterative Berechnungsablauf wird mit der Einstellung

Extras/Optionen/Berechnung

durch die Aktivierung des Feldes für Iteration gestartet. Durch die Vorgabe der maximalen Iterationszahl und der Abbruchgenauigkeit kann der Iterationsablauf gesteuert werden, mit der Taste F9 kann er fortgesetzt werden.

b) Der abgegebene Wärmestrom ins Erdreich wird berechnet, indem die Wärmeströme durch die gedachten Stäbe (Stabmodell) jeweils in einem Schnitt addiert werden. Da wegen Symmetriegründen nur ein Achtel der Kanalwand betrachtet wurde, ist das Ergebnis mit 8 zu multiplizieren.



HJ.ZI.22022001.BildAufg32.dsf

Für den Schnitt A gilt mit den Zahlen vom Eliminationsverfahren

$$\dot{Q} = 8 \sum \dot{Q}_i = 8 \frac{\lambda}{\Delta y} \Delta x L \sum \Delta t_i$$

$$\sum \Delta t_i = t_D - t_H + t_E - t_I + t_F - t_J + t_G - t_K = 210,834 \text{ K}$$

und für Schnitt B

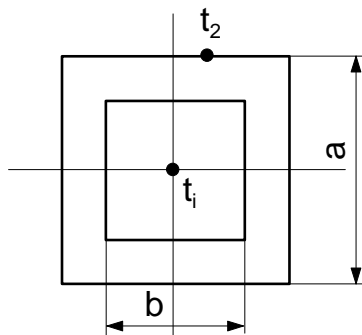
$$\sum \Delta t_i = t_A - t_D + t_B - t_E + t_C - t_F = 210,833 \text{ K}$$

$\sum \Delta t_i$ von beiden Schnitten müssen identisch sein, was hier gut erfüllt ist (ohne Rundung sind Zahlen identisch).

Mit $\sum \Delta t_i = 210,834 \text{ K}$ wird

$$\dot{Q} = 8 \cdot 1 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot 1 \text{ m} \cdot 210,834 \text{ K} = 1,686 \text{ kW}$$

c) Die Rechnung mit dem Formkoeffizient ist eine exakte Lösungsmethode und liefert den Vergleichswert für die Ergebnisse nach dem Relaxationsverfahren. Der innere Wärmeübergang wird durch eine äquivalente Schicht berücksichtigt.



HJ.ZI.22022001.BildAufg33.dsf

$$\delta_{\text{äqu}} = \frac{\lambda}{\alpha_i} = \frac{1}{50} \text{ m} = 0,02 \text{ m}$$

Mit dem Wärmeleitwiderstand für einen Rechteckkanal (siehe Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.11)

$$R_{\lambda} = \frac{0,93 \ln a/b - 0,0502}{2 \pi \lambda L} = 0,091353 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

und den Größen

$$b = 0,5 \text{ m} - 2 \cdot 0,02 \text{ m} = 0,46 \text{ m}, \quad a = 0,5 \text{ m} + 2 \cdot 0,2 \text{ m} = 0,9 \text{ m}$$

wird

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_{W,a}}{R_{\lambda}} = \frac{200 - 50}{0,091353} = 1,642 \text{ kW}$$

Der relative Fehler der Rechnung nach dem Relaxationsverfahren beträgt

$$f_{\text{rel}} = \frac{1,686 - 1,642}{1,642} \cdot 100\% = + 2,7\%$$

Eine näherungsweise Rechnung mit der mittleren logarithmischen Fläche

$$A_m = \frac{A_a - A_i}{\ln(A_a / A_i)} = 2,722 \text{ m}, \quad A_i = 4 \cdot 0,5 \text{ m} = 2 \text{ m}, \quad A_a = 4 \cdot 0,9 \text{ m} = 3,6 \text{ m}$$

liefert

$$\dot{Q} = \frac{t_i - t_{W,a}}{\frac{1}{\alpha_i A_i} + \frac{\delta}{\lambda A_m}} = \frac{200 - 50}{\frac{1}{50 \cdot 2} + \frac{0,2}{1 \cdot 2,722}} = 1,797 \text{ kW}$$

und einen relativen Fehler von

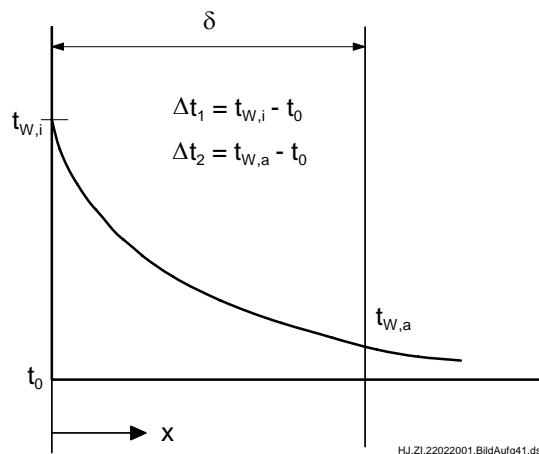
$$f_{\text{rel}} = + 9,4\% .$$

Trotz der sehr groben Diskretisierung ist der relative Fehler nach dem Relaxationsverfahren für eine praktische Anwendung ausreichend gering. Wenn mit mindestens 5 VE in Richtung des Wärmestromes gearbeitet wird, d.h. $\Delta x = \Delta y = 0,05 \text{ m}$ gewählt wird, erhält man $\dot{Q} = 1,6433 \text{ kW}$ und einen Fehler kleiner 0,1 %. Bei der Verfeinerung der Diskretisierung verkleinert sich der Fehler. Es ist aber der sehr starke Anstieg des Aufwandes zu beachten. Bei $\Delta x = \Delta y = 0,05$ (halbe VE-Abmessung gegenüber vorher) sind 30 Gleichungen zu lösen. Um denselben mittleren Fehler von etwa 0,8 K zu erhalten, müssen 11 statt 3 Iterationsschleifen berechnet werden, da sich wegen der gewählten Abarbeitungsrichtung $A \rightarrow G$ die Korrekturen nur langsam über das Feld ausbreiten.

Lösung Aufgabe 2.1:

Gegeben: Brandmauer $\lambda = 0,45 \text{ W/(m K)}$, $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 840 \text{ J/(kg K)}$
 Bedingungen $\Delta t_1 = 1000 \text{ K}$, $\Delta t_2 = 50 \text{ K}$, $\tau = 4 \text{ h}$

Gesucht: δ bei einseitig unendlich ausgedehnter Wand,
 pro Wandfläche aufgenommene Wärme \hat{q}



Temperaturverlauf in der Wand

Der Ansatz für die Temperaturverteilung in einer einseitig unendlich ausgedehnten Wand lautet

$$t(x, \tau) = A + B x + C \operatorname{erf}(\eta), \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}$$

Mit der Randbedingung $t(x = 0, \tau > 0) = t_{w,i}$

und der Anfangsbedingung $t(x, \tau = 0) = t_0$

wird

$$t_{w,i} = A, \quad \text{da } \operatorname{erf}(\eta = 0) = 0 \text{ ist,}$$

und $t_0 = A + C$, da $\operatorname{erf}(\eta = \infty) = 1$ und $B = 0$ (t_0 ist keine Funktion von x).

Damit wird (vgl. Umdruck S.10)

$$t(x, \tau) = t_{w,i} - (t_{w,i} - t_0) \operatorname{erf}(\eta)$$

und für $t(x = \delta, \tau) = t_{w,a}$ ergibt sich

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{t_{w,i} - t_{w,a}}{t_{w,i} - t_0} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1000 - 50}{1000} = 0,95$$

Als Näherungsfunktion für $\text{erf}(\eta)$ kann

$$\text{erf}(\eta) = \tanh \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0,1 \eta^2 \right) \eta \right\}$$

verwendet werden.

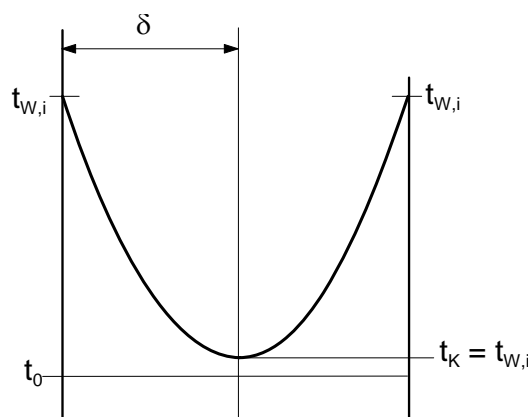
Nach einer iterativen Rechnung erhält man mit $\eta = 1,385$ den Wert $\text{erf}(\eta) = 0,9497 \approx 0,95$. Mit dem Temperaturleitkoeffizienten

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{0,45 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 840 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 3,348 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

wird

$$\delta = \sqrt{4 a \tau} \eta = \sqrt{4 \cdot 3,348 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 1,385} = 0,192 \text{ m}.$$

Bei dieser Rechnung wurde angenommen, dass die Wand sehr dick ist. Da für die Anwendung dieses Modells eine Wandstärke von $\ell > 3,63 \sqrt{a \tau} = 0,252 \text{ m}$ vorliegen müsste, können Fehler auftreten. Zur Abschätzung dieses Fehlers kann die Wärmestromdichte bei $x = \delta$ mit der Wärmestromdichte infolge Konvektion und Strahlung von der rechten Wand an die Umgebung verglichen werden. Zum Vergleich soll noch eine Lösung mit dem Gröber-Diagramm erfolgen. Dazu wird auf der rechten Wandseite eine adiabate Wand angenommen. Da an der Symmetrieachse $\hat{q} = 0$ ist, kann von einer doppelt so starken Wand ausgegangen und das Diagramm für die Kerntemperatur nach **Gröber** benutzt werden.



HJ.ZI.22022001.BildAufg42.dsf

$$\vartheta_K = \frac{t_K - t_U}{t_0 - t_U} = \frac{t_{w,i} - t_{w,a}}{t_{w,i} - t_0} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_1} = 0,95.$$

Mit $Bi = \infty$ (Randbedingung 1. Art) liest man aus dem Diagramm für die Kerntemperatur einer Platte (siehe Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.23) $Fo = 0,1$ ab. Damit wird die Wandstärke

$$\delta = \sqrt{\frac{a \tau}{Fo}} = \sqrt{\frac{3,348 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 4 \cdot 3600 \text{ s}}{0,1}} = 0,22 \text{ m}.$$

Das Ergebnis ist größer als oben, da über die rechte Wand (= Symmetrieachse) $\hat{q} = 0$ ist. Welches der beiden Modelle besser ist, kann erst entschieden werden, wenn die Randbedingung auf der kalten Wandseite bekannt ist.

Für das Modell der einseitig unendlich ausgedehnten Wand gilt für die von der Wand pro Fläche aufgenommene Wärme

$$\hat{q} = \int_0^{\tau} \hat{q}(x=0, \tau) d\tau$$

mit $\hat{q} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{\tau}$.

Aus $t(x, \tau) = t_{w,i} - (t_{w,i} - t_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$

folgt $\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{\tau} = \left(\frac{\partial t}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -\frac{2(t_{w,i} - t_0) \exp(-\eta^2)}{\sqrt{\pi} \sqrt{4 a \tau}}$

und $\hat{q}(x=0) = \frac{\lambda (t_{w,i} - t_0)}{\sqrt{a \pi \tau}}$.

(Es ist $\exp(-\eta^2) = 1$ bei $x = 0$).

Die Integration liefert

$$\hat{q} = \int_0^{\tau} \frac{\lambda (t_{w,i} - t_0)}{\sqrt{a \pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{2 \lambda (t_{w,i} - t_0) \sqrt{\tau}}{\sqrt{a \pi}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0,45 \frac{\text{W}}{\text{m K}} 1000 \text{ K} \sqrt{4 \cdot 3600 \text{ s}}}{\sqrt{3,348 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \pi}} = 105,3 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^2}.$$

Bei Verwendung der **Gröber**-Diagramme gilt $\hat{q} = \rho c_p \delta (t_m - t_0)$.

Mit $Fo = 0,1$ und $Bi = \infty$ liest man aus dem Diagramm (S.24) $\mathfrak{G}_m = 0,65$ ab.

Damit wird

$$t_m - t_0 = (t_m - t_U) + (t_U - t_0) = -\mathfrak{G}_m (t_U - t_0) + (t_U - t_0)$$

$$= -0,65 \cdot 1000 \text{ K} + 1000 \text{ K} = 350 \text{ K}$$

$$\hat{q} = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 840 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 0,22 \text{ m} \cdot 350 \text{ K} = 103,5 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^2}.$$

Die Ergebnisse nach beiden Ansätzen stimmen gut überein. Bei der ersten Rechnung ist zu beachten, dass ein Teil der von der Wand aufgenommenen Wärme auf der rechten Wandseite abgegeben wird.

Lösung Aufgabe 2.2:

Gegeben: Erdreich $\lambda = 1,16 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 0,84 \text{ kJ/(kg K)}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
 Anfangstemperatur des Erdreiches $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$,
 Wandtemperatur des Abgaskanals $t_w = 150 \text{ }^\circ\text{C}$.

Gesucht: a) Zeit τ , wenn $t(x = 2 \text{ m}) = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ist
 b) Temperaturverlauf $t(x, \tau = 200 \text{ h})$
 c) Gesamtwärmeverlust pro Kanalfläche \hat{q}_K für $\Delta\tau = 200 \text{ h}$.

a) Zur Lösung dieser Aufgabe wird angenommen, dass der Wärmefluss im Erdreich in erster Näherung nur in einer Richtung erfolgt, dass also ein eindimensionales Wärmeleitproblem in einem einseitig unendlich ausgedehnten Körper vorliegt. Das Temperaturfeld für den hier gegebenen Fall (vgl. Umdruck S.10, Randbedingung 1. Art) berechnet sich zu

$$\vartheta = \frac{t - t_w}{t_0 - t_w} = \text{erf}(\eta).$$

Daraus folgt

$$t(x, \tau) = t_w - (t_w - t_0) \text{erf}(\eta).$$

Für den Temperaturleitkoeffizienten des Erdreiches ergibt sich

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{1,16 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 840 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 0,690 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Aus dem Lösungsansatz folgt der Wert des Fehlerintegrals zu

$$\text{erf}(\eta) = \frac{150 - 50}{150 - 0} = 0,667.$$

Den zugehörigen η -Wert erhält man aus der tabellierten Funktion $\text{erf}(\eta)$ (siehe Bronstein) oder aus einer iterativen Rechnung mit der Näherungsfunktion (siehe Umdruck S.11)

$$\text{erf}(\eta) = \tanh \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0,1\eta^2 \right) \eta \right\}.$$

Dabei werden geschätzte Werte für η eingesetzt, und man erhält $\text{erf}(\eta)$. Durch lineare Interpolation bzw. Extrapolation kann sehr schnell ein ausreichend genaues Ergebnis erhalten werden.

Z.B.

1. Annahme $\eta = 0,7 \rightarrow \text{erf}(\eta) = 0,6773$

2. Annahme $\eta = 0,67 \rightarrow \text{erf}(\eta) = 0,6562$

lineare Interpolation $\eta = 0,685$

Kontrolle liefert $\text{erf}(\eta = 0,685) = 0,667$

Aus $\eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}$ erhält man

$$\tau = \frac{x^2}{4 a \eta^2} = \frac{2^2 \text{ m}^2}{4 \cdot 0,69 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 0,685^2} = 3,09 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 853 \text{ h}.$$

b) Es gilt für die Temperaturverteilung im Erdreich unterhalb der Kanalsohle

$$t(x, \tau = 200 \text{ h}) = 150 \text{ °C} - 150 \text{ K} \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4 \cdot 0,69 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 200 \text{ h} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}}}} \right).$$

Die Auswertung dieser Gleichung für die in der Aufgabenstellung genannten x-Werte ergibt

x in m	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
t in °C	103,4	63,5	34,5	16,4	6,8

c) Die durch die Kanalsohle ($x = 0$) in das Erdreich eintretende Wärmestromdichte berechnet sich nach dem Fourierschen Erfahrungsgesetz

$$\hat{q} = -\lambda \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left(\frac{dt}{d\eta} \right)_{\eta=0} \frac{d\eta}{dx}$$

mit der Temperaturfunktion

$$t = t_w + (t_0 - t_w) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

sowie

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}} \text{ zu}$$

$$\hat{q}(x=0, \tau) = \frac{2 \lambda (t_w - t_0)}{\sqrt{4 a \pi \tau}}.$$

Die Gesamtwärme pro Kanalfläche erhält man durch Integration zu

$$\hat{q}_K = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \hat{q}(x=0, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{2 \lambda (t_w - t_0)}{\sqrt{4 a \pi \tau}} d\tau = \frac{4 \lambda (t_w - t_0)}{\sqrt{4 a \pi}} \left(\sqrt{\tau_2} - \sqrt{\tau_1} \right)$$

Daraus folgt nach Einsetzen der Zahlenwerte ($\tau_1 = 0$)

$$\hat{q}_K = \frac{4 \cdot 1,16 \text{ W} (150 - 0) \text{ K}}{\text{m K}} \sqrt{\frac{200 \text{ h} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}}}{4 \cdot \pi \cdot 0,690 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}.$$

Dieser Wärmeverlust entspricht 55,5 kWh/m² und bei einem angenommenen Fernwärmepreis von 0,04 EUR/kWh entstehen finanzielle Verluste von 2,22 EUR/m².

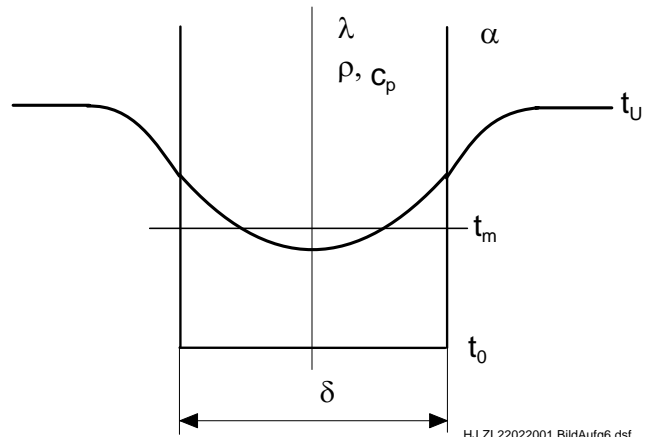
Lösung Aufgabe 2.3:**Gegeben:**

Betonwand $\delta = 0,2 \text{ m}$, $\lambda = 1,47 \text{ W/(m K)}$,

$\rho = 2350 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 1,05 \text{ kJ/(kg K)}$

$t_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$,

Umgebung $t_U = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha = 12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

**Gesucht:**

- t_m nach $\tau = 6 \text{ h}$
- \hat{q} während $\tau = 6 \text{ h}$
- Fehler bei quasistatischer Lösung
- t_m bei $t_U(\tau)$

a) Da nach der mittleren Temperatur t_m gefragt wird, kann das Näherungsverfahren nach Schlünder verwendet werden. Im Einzelnen werden berechnet:

Fourier-Zahl

$$Fo = \frac{a \tau}{\ell^2} = 1,287$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = 5,957 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \ell = \delta/2 = 0,1 \text{ m}$$

effektiver Wärmeleitkoeffizient für Anfangszeit

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2 \lambda}{\sqrt{\pi Fo}} = \frac{2 \cdot 1,47 \text{ W/(mK)}}{\sqrt{\pi \cdot 1,287}} = 1,462 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

effektiver Wärmeleitkoeffizient für Endzeit

$$\lambda_{\text{eff},00} = \frac{\pi^2}{4} \lambda = \frac{\pi^2}{4} 1,47 \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 3,627 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

effektiver Wärmeleitkoeffizient für gesamten Zeitbereich

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},00}^2)^{1/2} = 3,91 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Biot-Zahl

$$Bi = \frac{\alpha \ell}{\lambda} = \frac{\alpha \delta/2}{\lambda} = \frac{12 \cdot 0,1}{1,47} = 0,816$$

dimensionslose mittlere Temperatur

$$\vartheta_m = \exp \left(- \frac{A \ell}{V} \frac{Fo}{\frac{1}{Bi} + \frac{\lambda}{\lambda_{\text{eff}}}} \right) = \exp \left(-1 \cdot \frac{1,287}{\frac{1}{0,816} + \frac{1,47}{3,91}} \right) = 0,4477$$

(Bei beidseitig beheizter Platte gilt $A \ell/V = 1$).

mittlere Temperatur

$$t_m = t_U + \vartheta_m (t_0 - t_U) = 20 \text{ °C} + 0,4477 (10 - 20) \text{ K} = 15,52 \text{ °C}.$$

Vergleich mit Gröberlösung:

$$Bi = 0,816, \quad Fo = 1,287 \quad \text{Umdruck WÜ S.24 bzw. Näherungsgl.}$$

$$\rightarrow \vartheta_m = 0,4381$$

Fehler der Schlünder-Lösung

$$f_{\text{rel}} = \frac{0,4477 - 0,4381}{0,4381} 100 \% = 2,2 \%$$

- b) Die aufgenommene Wärme pro Wandfläche (von jeder Wandfläche) im Zeitraum von 0 bis 6 h beträgt

$$\hat{q} = \frac{Q}{A} = \frac{m c_p (t_m - t_0)}{A} = \frac{\rho \delta / 2 A c_p (t_m - t_0)}{A}$$

$$\hat{q} = \rho \frac{\delta}{2} c_p (t_m - t_0) = 2350 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 0,1 \text{ m} 1,05 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} (15,52 - 10) \text{ K} = 1362 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2}$$

- c) Die quasistatische Lösung liefert bei der Annahme $\lambda_{\text{eff}} \rightarrow \infty$

$$\vartheta_m = \exp \left(- \frac{A \ell}{V} Bi Fo \right) = \exp (-1 \cdot 0,816 \cdot 1,287) = 0,3499$$

$$t_m = 20 \text{ °C} + 0,3499 (10 - 20) \text{ K} = 16,50 \text{ °C}$$

relativer Fehler (bezogen auf Temperaturdifferenz $t_U - t_0$)

$$f_{\text{rel}} = |(\vartheta_m^c - \vartheta_m^a)| 100 \% = |(0,3499 - 0,4477)| \cdot 100 \% = 9,8 \%$$

relativer Fehler (bezogen auf die Aufwärmung $t_m - t_0$)

$$f_{\text{rel}} = \frac{(t_m^c - t_m^a)}{t_m^a - t_0} 100\% = \frac{16,50 - 15,52}{5,52 - 10} 100\% = 17,75\%$$

Mit der quasistatischen Lösung werden ungenauere Ergebnisse erhalten, da die Anwendungsgrenze $Bi < 0,1$ nicht eingehalten wird.

d) Die Umgebungstemperatur ändert sich nach der Funktion

$$t_U = 10^\circ\text{C} + 10\text{K} \left(1 - \exp\left(-\frac{0,8\tau}{h}\right) \right)$$

τ	h	0	1	2	3	4	5	6
t_U	$^\circ\text{C}$	10	15,507	17,981	19,093	19,592	19,817	19,918

Der gesamte Zeitbereich wird in 3 Teile zerlegt ($\tau_n = \tau/3 = 2\text{h}$), wobei die Bedingung $FO_n > FO^* = 0,4$ (für Platte) eingehalten wird.

Für jeden Zeitbereich gilt

$$FO_n = \frac{a \tau_n}{(\delta/2)^2} = \frac{5,957 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 3600}{0,1^2} = 0,429$$

und

$$Bi_n = \frac{\alpha \delta/2}{\lambda} = 0,816.$$

Für die dimensionslose mittlere Temperatur gilt

$$\vartheta_{m,n} = \exp\left(-\frac{A \ell}{V} \frac{FO_n}{\frac{1}{Bi_n} + \frac{\lambda}{\lambda_{\text{eff}}}}\right)$$

und mit

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi FO_n}} = 2,532\text{ W/(m K)}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},00}^2)^{1/2} = (2,532^2 + 3,627^2)^{1/2} \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 4,424 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

wird

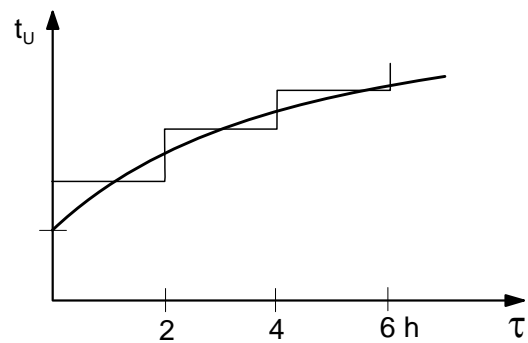
$$\vartheta_{m,n} = \exp\left(-\frac{0,429}{\frac{1}{0,816} + \frac{1,47}{4,424}}\right) = 0,7593.$$

Die Mitteltemperatur am Ende eines Zeitbereiches ist gleich der Anfangstemperatur des nächsten Zeitbereiches

$$t_{m,n} = \bar{t}_{U,n} + g_{m,n}(t_{0,n} - \bar{t}_{U,n}) = t_{0,n+1}$$

Die Mittelwertbildung der Umgebungstemperatur für die 3 Zeitbereiche erfolgt nach der Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{t}_{U,n} &= \frac{1}{\tau_{n+1} - \tau_n} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} t_u(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\tau_{n+1} - \tau_n} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [a + b(1 - \exp(-c\tau))] d\tau \\ &= a + b \left[1 + \frac{1}{c(\tau_{n+1} - \tau_n)} (\exp(-c\tau_{n+1}) - \exp(-c\tau_n)) \right] \end{aligned}$$



HJ.ZI.22022001.BildAufg62.dsf

$$\bar{t}_{U,n} = 10^\circ\text{C} + 10\text{K} \left[1 + \frac{1}{1,6} \left(\exp\left(-0,8 \frac{\tau_{n+1}}{\text{h}}\right) - \exp\left(-0,8 \frac{\tau_n}{\text{h}}\right) \right) \right]$$

Auswertung

	1. Bereich	2. Bereich	3. Bereich
τ_n	0 h	2 h	4 h
τ_{n+1}	2 h	4 h	6 h
$\bar{t}_{U,a}$	15,012 °C	18,993 °C	19,797 °C
$t_{0,n}$	10 °C	11,206 °C	13,081 °C
$t_{m,n}$	11,206 °C	13,081 °C	14,698 °C

Zum Vergleich liefert die Rechnung in einem Schritt

$$Fo = 1,287, Bi = 0,816, g_m = 0,447, \bar{t}_U = 17,934^\circ\text{C} \text{ und } t_m = 14,383^\circ\text{C}$$

Die Rechnung mit dem arithmetischen Mittelwert für die Umgebungstemperatur

$$\bar{t}_U = \frac{1}{2} (t_0 + t_E) = \frac{1}{2} (10 + 19,918)^\circ\text{C} = 14,959^\circ\text{C} \text{ ergibt } t_m = 12,74^\circ\text{C}.$$

Mit dieser einfachen Rechnung wird ein großer Fehler gemacht.

Ergänzung/Exakte Lösung

Energiebilanz

$$\rho c_p V \frac{dt_m}{d\tau} = k_{\text{eff}} A (t_U(\tau) - t_m(\tau))$$

$$\frac{dt_m}{d\tau} = \frac{1}{\tau_0} (t_U(\tau) - t_m(\tau))$$

Zeitkonstante

$$\tau_0 = \frac{\rho c_p V}{k_{\text{eff}} A} = \frac{\rho c_p \delta/2}{k_{\text{eff}}} = \frac{2350 \text{ kg/m}^3 \cdot 1050 \text{ J/(kg K)} \cdot 0,1 \text{ m}}{9,182 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}} = 7,465 \text{ h}$$

effektiver Wärmedurchgangskoeffizient für instationären Vorgang

$$k_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta/2}{\lambda_{\text{eff}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}} + \frac{0,1 \text{ m}}{3,91 \text{ W/(m K)}} \right)^{-1} = 9,182 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Funktion für Umgebungstemperatur

$$t_U(\tau) = 10 \text{ °C} + 10 \text{ K} \left(1 - \exp\left(-\frac{0,8}{\text{h}} \tau\right) \right)$$

Einsetzen in Energiebilanz

$$\frac{dt_m}{d\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left(20 \text{ °C} - 10 \text{ K} \exp\left(-\frac{0,8}{\text{h}} \tau\right) - t_m(\tau) \right)$$

allgemeine Form der Differentialgleichung

$$y' + a y = f(x) \quad y \hat{=} t_m, x \hat{=} \tau$$

Lösung der Differentialgleichung nach Stöcker „Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren“ S. 561 oder nach LV Mathematik in 3 Schritten:

1. Schritt - Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y' + a y = 0 \quad \rightarrow \quad y_H = C_1 \exp(-a x)$$

2. Schritt - Variation der Konstanten

$$\psi(x) = \int \frac{f(x)}{y_H} dx$$

3. Schritt - Erstellen der Gesamtlösung

$$y = y_H \cdot \psi(x)$$

Lösen der vorliegenden Differentialgleichung nach obigen Schema

$$\frac{dt_m}{d\tau} + \frac{1}{\tau_0} t_m = 0$$

$$\int \frac{dt_m}{t_m} = -\frac{1}{\tau_0} \int d\tau \rightarrow t_{m,H} = C_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\tau_0 C_1} \int \frac{20^\circ\text{C} - 10 \text{ K} \exp\left(-\frac{0,8}{h} \tau\right)}{\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)} d\tau$$

$$= \frac{1}{\tau_0 C_1} \int \left[20^\circ\text{C} \exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - 10 \text{ K} \exp\left(\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{0,8}{h}\right)\tau\right) \right] d\tau$$

$$= \frac{1}{\tau_0 C_1} \left[20^\circ\text{C} \tau_0 \exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{10 \text{ K}}{\frac{1}{\tau_0} - \frac{0,8}{h}} \exp\left(\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{0,8}{h}\right)\tau\right) + C_2 \right]$$

$$t_m(\tau) = t_{m,H} \psi(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \left[20^\circ\text{C} \exp\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{10 \text{ K}}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0} \exp\left(\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{0,8}{h}\right)\tau\right) + C_3 \right]$$

$$t_m(\tau) = 20 \text{ °C} - \frac{10 \text{ K}}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0} \exp\left(-\frac{0,8}{h} \tau\right) + C_3 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Bestimmen von C_3 mit Anfangsbedingung $t_m(\tau = 0) = 10 \text{ °C}$

$$10 \text{ °C} = 20 \text{ °C} - \frac{10 \text{ K}}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0} + C_3 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{8 \tau_0}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0}$$

endgültige Lösung

$$t_m(\tau) = 20 \text{ °C} - \frac{10 \text{ K}}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0} \exp\left(-\frac{0,8}{h} \tau\right) + \frac{8 \tau_0}{1 - \frac{0,8}{h} \tau_0} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

mittlere Wandtemperatur

τ	h	2	4	6
t_m	$^{\circ}\text{C}$	11,218	13,053	14,64

Die Abweichungen der obigen Näherungslösung gegenüber der exakten Lösung sind bezogen auf $t_m(\tau) - t_0$ etwa 1 %.

andere Lösungsmöglichkeiten

- Lösung mit Mathcad

$$\text{Lösung der Dgl. von oben } \frac{dt_m}{d\tau} + \frac{t_m(\tau)}{\tau_0} = \frac{t_U(\tau)}{\tau_0}$$

In Mathcad ist folgendes zu schreiben:

Vorgabe

$$\frac{d}{d\tau} t_m(\tau) + \frac{t_m(\tau)}{7.465} = \frac{20 - 10 \exp(-0.8 \tau)}{7.465}$$

$$t_m(0) = 10$$

= Boolesche Zeichen

$$t_m := \text{gdglösen}(\tau, 6, 20)$$

$$t_m(2) = 11.218, t_m(4) = 13.053, t_m(6) = 14.64$$

Mathcad rechnet mit Runge-Kutta-Verfahren. In der Funktion gdglösen ist 6 die obere Grenze und 20 eine vorgegebene Schrittzahl (optional).

- Numerische Integration nach Euler, Heun u.a. (vergleiche Skript Kapitel 2.5)
- exakte Lösung des Problems (ohne k_{eff} bzw. Schlünder-Verfahren)

Die numerische Lösung der Dgl. (vergleiche Skript Kapitel 2.6)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

mit der Randbedingung $t_U(\tau)$ liefert $t(x, \tau)$ in der Wand, daraus durch integrale Mittelwertbildung $t_m(\tau)$ bilden.

Lösung Aufgabe 2.6:

Gegeben:	Wasserleitung	$d_a = 23 \text{ mm}$, $d_i = 19 \text{ mm}$, $\lambda_W = 40 \text{ W/(m K)}$ $\rho_W = 7800 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,W} = 0,47 \text{ kJ/(kg K)}$, $t_0 = 0^\circ\text{C}$
	Eis	$\rho_E = 917 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,E} = 2,04 \text{ kJ/(kg K)}$, $\lambda_E = 2,25 \text{ W/(m K)}$, $\Delta h_{\text{Schm}} = 333 \text{ kJ/kg}$
	Wasser	$\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_F = 0,552 \text{ W/(m K)}$
	Umgebung	$t_U = -10^\circ\text{C}$, $\alpha_a = 15 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
Gesucht:	a)	Zeit τ bis 90% des Querschnittes zugefroren ist
	b)	Fehler der quasistatischen Rechnung
	c)	Einfluss einer laminaren Wasserströmung mit $t_i = 1^\circ\text{C}$

a) Wenn 90% des Querschnittes des Rohres mit Eis belegt ist, ergibt sich aus der Querschnittsfläche A_E

$$A_E = 0,9 \frac{\pi}{4} d_i^2 = \frac{\pi}{4} (d_i^2 - d_E^2)$$

der innere Durchmesser der Eisschicht zu

$$d_E = \sqrt{0,1} d_i = \sqrt{0,1} 0,019 \text{ m} = 0,006 \text{ m}.$$

Für die Berechnung der Gefrierzeit werden die folgenden dimensionslosen Größen verwendet:

dimensionslose Länge

$$\xi_E = \frac{x}{\ell} = \frac{d_E/2}{d_i/2} = \frac{d_E}{d_i} = \frac{6}{19} = 0,316$$

Phasenumwandlungszahl

$$Ph = \frac{\rho_F \Delta h_{\text{Schm}}}{\rho_E c_{p,E} |(t_{\text{Schm}} - t_U)|} = \frac{1000 \cdot 333}{917 \cdot 2,04 |(0 + 10)|} = 17,80$$

Biot-Zahl (berechnet, als ob keine Rohrwand vorhanden wäre)

$$Bi_E = \frac{\alpha_a d_i/2}{\lambda_E} = \frac{15 \cdot 0,0095}{2,25} = 0,0633$$

Die dimensionslose Zeit für den Gefriervorgang (Index 2 \rightarrow E) ergibt sich aus

$$Fo_E = \frac{Ph}{2} \left[(1 - \xi_E^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_E} \right) + \xi_E^2 \ln \xi_E \right]$$

$$Fo_E = \frac{17,80}{2} \left[(1 - 0,316^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0,0633} \right) + 0,316^2 \ln 0,316 \right] = 129,5$$

und daraus die Gefrierzeit

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Fo_E \rho_E c_{p,E} (d_i/2)^2}{\lambda_E} \\ &= \frac{129,5 \cdot 917 \text{ kg/m}^3 \cdot 2040 \text{ J/(kg K)} \cdot (0,0095 \text{ m})^2}{2,25 \text{ W/(m K)}} = 9717 \text{ s} = 2,7 \text{ h} \end{aligned}$$

Einfluss der Wandstärke:

Der Wärmeleitwiderstand der Rohrwand wird durch einen äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten berücksichtigt.

Widerstand von Rohrwand + Wärmeübergangswiderstand = äquivalenter Wärmeübergangswiderstand

$$R_{\lambda,W} + R_{\alpha,a} = R_{\alpha,a}^*$$

$$\frac{\ln \frac{d_a}{d_i}}{2 \pi L \lambda_W} + \frac{1}{\alpha_a \pi L d_a} = \frac{1}{\alpha_a^* \pi L d_i}$$

Der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient muss auf den inneren Rohrdurchmesser bezogen werden, da dort die Eisbildung beginnt.

$$\alpha_a^* = \left(\frac{d_i}{\alpha_a d_a} + \frac{d_i}{2 \lambda_W} \ln \frac{d_a}{d_i} \right)^{-1}$$

$$\alpha_a^* = \left(\frac{0,019}{15 \cdot 0,023} + \frac{0,019}{2 \cdot 40} \ln \frac{23}{19} \right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 18,143 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient α_a^* ist größer als α_a , da einerseits der Wärmeleitwiderstand der Wand sehr klein ist und andererseits durch die korrekte Erfassung des äußeren Wärmeübergangswiderstandes (Wärmeübergang wirkt an Rohraußenfläche und nicht Rohrinnefläche) dieser kleiner wird. Mit α_a^* wird $Bi_E^* = 0,0766$ und $Fo_E^* = 107,6$ und

$\tau^* = 8074 \text{ s} = 2,24 \text{ h}$. Die Gefrierzeit ist kleiner geworden, da α_a^* größer als α_a ist. Bei dieser Rechnung wurde die Abkühlung der Rohrwand nicht berücksichtigt (Annahme des quasistatischen Modells).

b) Der Fehler der quasistatischen Rechnung wird sehr klein sein, da $Ph > 10$ **und** $Bi_E < 0,1$ ist. Da aber auch die Rohrwand abgekühlt werden muss, soll der maximal mögliche Fehler abgeschätzt werden.

Bei Annahme einer stationären Temperaturverteilung berechnet sich die äußere Rohrwandtemperatur bei $\tau = 2,24 \text{ h}$ aus den Gleichungen für den Wärmedurchgang durch Zylinderwände.

$$\dot{Q} = \frac{t_{\text{Schm}} - t_{W,a}}{R_{\lambda,E} + R_{\lambda,W}} = \frac{t_{W,a} - t_U}{R_{\alpha,a}}$$

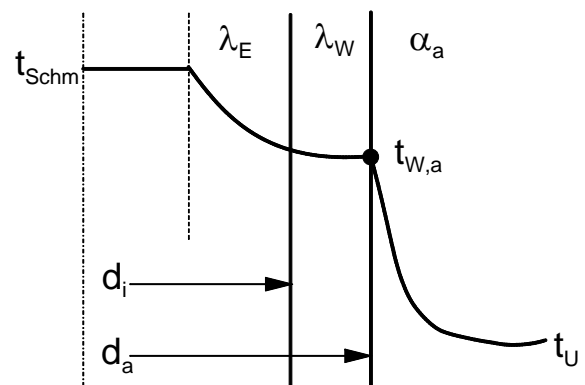
$$t_{W,a} = \frac{t_{\text{Schm}} R_{\alpha,a} + t_U (R_{\lambda,E} + R_{\lambda,W})}{R_{\lambda,E} + R_{\lambda,W} + R_{\alpha,a}}$$

$$R_{\alpha,a} = \frac{1}{\pi L \alpha_a d_a} = \frac{0,9226 \text{ K m}}{L \text{ W}}$$

$$R_{\lambda,E} = \frac{\ln \frac{d_i}{d_E}}{2 \pi \lambda_E L} = \frac{0,0815 \text{ K m}}{L \text{ W}}$$

$$R_{\lambda,W} = \frac{\ln \frac{d_a}{d_i}}{2 \pi \lambda_W L} = \frac{7,602 \cdot 10^{-4} \text{ K m}}{L \text{ W}}$$

$$t_{W,a} = -0,819^\circ \text{C}.$$



Der maximale Fehler tritt dann auf, wenn angenommen wird, dass das gesamte Eis + Wand auf diese Temperatur abgekühlt werden muss.

Dazu wäre zusätzlich eine Energie von

$$\Delta H_{W+E} = \Delta H_{\text{Unt}} = (m_W c_{p,W} + m_E c_{p,E}) (t_{\text{Schm}} - t_{W,a})$$

$$m_W c_{p,W} = \rho_W \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) c_{p,W} L = 0,484 L \frac{\text{kJ}}{\text{m K}}$$

$$m_E c_{p,E} = \rho_E \frac{\pi}{4} (d_i^2 - d_E^2) c_{p,E} L = 0,477 L \frac{\text{kJ}}{\text{m K}}$$

$$\Delta H_{\text{Unt}} = 0,787 L \frac{\text{kJ}}{\text{m}}$$

notwendig. Im Vergleich dazu wird für den Gefriervorgang bei 0 °C die Energie

$$\Delta H_{\text{Schm}} = m_E \Delta h_{\text{Schm}} = \rho_F \frac{\pi}{4} (d_i^2 - d_E^2) L \Delta h_{\text{Schm}} = 85,0 \text{ L} \frac{\text{kJ}}{\text{m}}$$

benötigt.

Korrektur der Phasenumwandlungszahl

$$\begin{aligned} \text{Ph}^* &= \frac{\Delta H_{\text{Schm}} + \Delta H_{\text{Unt}}}{\rho_E c_{p,E} | (t_{\text{Schm}} - t_U) | V_E} \\ &= \frac{(85,0 + 0,787) \text{ L}}{917 \cdot 2,04 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{4} (0,019^2 - 0,006^2) \text{ L}} = 17,96 \end{aligned}$$

Da $\tau \sim \text{Fo}_E \sim \text{Ph}$ gilt, ist der maximale Fehler

$$f_{\text{rel}} = \frac{|\text{Ph} - \text{Ph}^*|}{\text{Ph}^*} 100\% = 0,9\%$$

Da nicht das gesamte Eis + Wand auf $t_{w,a}$ abgekühlt werden muss (nach Vorlesung Faktor $1/n = 0,5$ für Zylinderwand), wird der Fehler unter 0,5% liegen.

Anmerkung : Da Δh_{Schm} auf 1 kg Wasser bezogen ist, muss mit ρ_F (Dichte der Wasserflüssigkeit) bei der Berechnung der Enthalpie (vgl. auch Definition der Phasenumwandlungszahl) gearbeitet werden. An dieser Stelle tritt eine Unklarheit auf. Wenn gefragt ist, wie lange es bis zum Gefrieren einer bestimmten Wasserschicht dauert, sind obige Gleichungen richtig. Wenn gefragt ist, wie lange es dauert, bis das Rohr zugefroren ist, tritt in obigen Gleichungen eine Unsauberkeit auf. Da $\rho_E < \rho_W$ gilt, ist das Rohr schon zugefroren, bevor das gesamte Wasser gefroren ist (Volumen des Eises $>$ Volumen des Wassers bei $p = \text{const}$). Wenn also die Bedingung $p = \text{const}$ noch vorgegeben wird, muss ein Teil des Wassers aus dem Rohr verdrängt werden. Damit müsste nur (entspr. $m = \rho_W V_W = \rho_E V_E$) der

$$\frac{V_W}{V_E} = \frac{\rho_E}{\rho_W} = \frac{917}{1000} = 0,917$$

fache Teil des Wassers gefrieren. Entsprechend verringert sich die Gefrierzeit auf 91,7%.

c) Zuerst soll eine Kontrolle zeigen, ob der Widerstand der Eisschicht (Dicke $\delta = 2$ mm) gegenüber dem äußeren Widerstand vernachlässigt werden kann.

$$R_{\alpha,a} = \frac{0,9226 \text{ K m}}{L} \frac{1}{W}, \quad R_{\lambda,E} = \frac{\ln(19/15) \text{ K m}}{2 \pi 2,25 L} \frac{1}{W} = \frac{0,0167 \text{ K m}}{L} \frac{1}{W}$$

Die Vernachlässigung ist zulässig, da die Eisschicht nur einen sehr geringen Wärmeleitwiderstand aufweist (1,8% von $R_{\alpha,a}$).

Die Energiebilanz für die gefrierende Schicht lautet

$$\frac{dH}{d\tau} = \dot{Q}_i - \dot{Q}_a$$

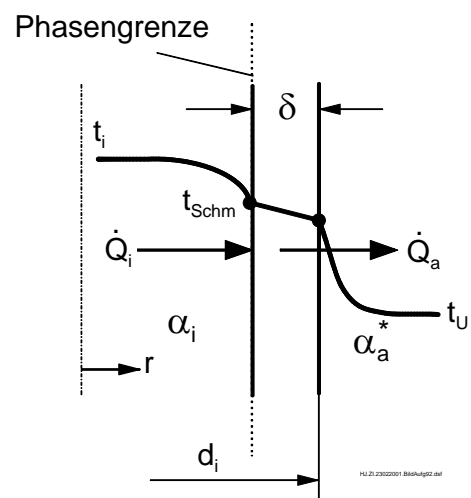
$$dH = \rho_F \Delta h_{\text{Schm}} 2 \pi r L dr$$

$$\dot{Q}_i = \alpha_i 2 \pi r L (t_i - t_{\text{Schm}})$$

$$\dot{Q}_a = \alpha_a^* 2 \pi r_i L (t_{\text{Schm}} - t_U)$$

oder

$$\dot{Q}_a = \alpha_a 2 \pi r_a L (t_{\text{Schm}} - t_U)$$



Einsetzen liefert

$$\rho_F \Delta h_{\text{Schm}} 2 \pi r L \frac{dr}{d\tau} = \alpha_i 2 \pi r L (t_i - t_{\text{Schm}}) - \alpha_a 2 \pi r_a L (t_{\text{Schm}} - t_U)$$

Für den inneren Wärmeübergangskoeffizienten gilt bei laminarer Strömung in einem langen Rohr (vollausbildetes Strömungsprofil und Temperaturprofil) und bei der Randbedingung $t_w = t_E = 0 \text{ °C} = \text{const}$

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_i 2 r}{\lambda_F} = 3,656$$

(vgl. Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.39)

Damit wird aus

$$\rho_F \Delta h_{\text{Schm}} r \frac{dr}{d\tau} = \frac{\text{Nu} \lambda_F}{2} (t_i - t_{\text{Schm}}) - \alpha_a r_a (t_{\text{Schm}} - t_U)$$

nach T.d.V. und Integration

$$\rho_F \Delta h_{\text{Schm}} \int_{r_i}^r r \, dr = \left[\frac{\text{Nu} \lambda_F}{2} (t_i - t_{\text{Schm}}) - \alpha_a r_a (t_{\text{Schm}} - t_U) \right] \int_0^\tau dt$$

Die Zeit bis zur Bildung einer Eisschicht mit der Dicke $\delta = 2\text{mm}$

$$\tau = \frac{\rho_F \Delta h_{\text{Schm}} \frac{1}{2} (r^2 - r_i^2)}{\frac{\text{Nu} \lambda_F}{2} (t_i - t_{\text{Schm}}) - \alpha_a r_a (t_{\text{Schm}} - t_U)}$$

Mit $r = r_i + \delta = (19/2 + 2) \text{ mm} = 10,5 \text{ mm}$ wird $\tau = 7907 \text{ s} = 2,2 \text{ h}$.

Die Eisbildung an der inneren Rohroberfläche beginnt nicht, wenn zur Zeit $\tau = 0$ $\dot{Q}_i \geq \dot{Q}_a$ gilt. Damit wird aus

$$\frac{\text{Nu}}{2} \lambda_F (t_i - t_{\text{Schm}}) = \alpha_a r_a (t_{\text{Schm}} - t_U)$$

die Mindestwassertemperatur

$$t_i = t_{\text{Schm}} + \frac{2 \alpha_a r_a}{\text{Nu} \lambda_F} (t_{\text{Schm}} - t_U) = 0^\circ\text{C} + \frac{2 \cdot 15 \cdot 0,0115}{3,656 \cdot 0,552} (0 + 10) \text{ K} \quad t_i = 1,71^\circ\text{C}$$

Da eine laminare Strömung vorliegen soll, ist die berechnete Temperatur t_i unabhängig vom Massestrom des Wassers! Dieser hat aber natürlich insofern einen indirekten Einfluss, da sich bei größerem Massestrom das Wasser längs des Rohres weniger abkühlt (Energiebilanz!) und damit die Temperatur $t_i = 1,71^\circ\text{C}$ erst später erreicht wird (wenn z. B. von einer Eintrittstemperatur des Wassers in die Rohrleitung von $t > t_i$ ausgegangen wird).

Lösung Aufgabe 2.7:

Gegeben:	Platte	$\delta = 3 \text{ cm}, t_0 = 20 \text{ °C}$
	Wasser	$\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3, c_{p,W} = 4,19 \text{ kJ/(kg K)},$ $\lambda_W = 0,578 \text{ W/(m K)}$
	Eis	$\rho_E = 918 \text{ kg/m}^3, c_{p,E} = 1,995 \text{ kJ/(kg K)},$ $\lambda_E = 2,35 \text{ W/(m K)}, \Delta h_{\text{Schm}} = 333 \text{ kJ/kg}$
	Umgebung	$t_U = -30 \text{ °C}$
	Abkühlung auf	$t_E = -20 \text{ °C}$

- Gesucht:**
- Abkühlzeit τ in Kältemittel
 - Abkühlzeit τ in Luft
 - Abkühlzeit τ bei Kontaktkühlung
 - Phasengrenzgeschwindigkeit dx/dt

a) Die Schmelzenthalpie wird um die Änderung der Enthalpie des Wassers und um die Unterkühlungsenthalpie des Eises vergrößert, um die insgesamt abzuführende Energie zu berücksichtigen. Dabei wird angenommen, dass diese Energie durch die sich bildende Eisschicht transportiert werden muss.

$$\begin{aligned} \Delta h_{\text{Schm}}^* &= \Delta h_{\text{Schm}} + c_{p,W} (t_0 - t_{\text{Schm}}) + c_{p,E} (t_{\text{Schm}} - t_E) \\ &= (333 + 4,19 \cdot 20 + 1,995 \cdot 20) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 456,7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

Phasenumwandlungszahl (gebildet mit korrigierter Schmelzenthalpie)

$$Ph = \frac{\rho_W \Delta h_{\text{Schm}}^*}{\rho_E c_{p,E} |t_{\text{Schm}} - t_U|} = \frac{1000 \cdot 456,7}{918 \cdot 1,995 \cdot 30} = 8,312$$

Biot-Zahl (Annahme eines sehr guten Wärmeüberganges an den Plattenoberflächen)

$$Bi = \infty \quad (\alpha \rightarrow \infty, \text{Randbedingung 1. Art})$$

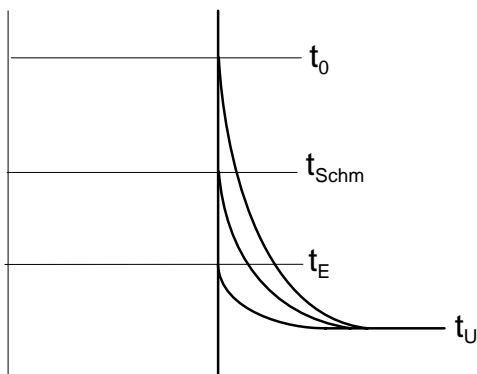
Fourier-Zahl (für Durchfrieren der Platte von beiden Seiten)

$$Fo_E = \frac{Ph}{2} = 4,156$$

Aus der Fourier-Zahl ergibt sich die Zeit bis zum Durchfrieren der Platte.

$$\tau = \frac{Fo_E \rho_E c_{p,E} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\lambda_E} = \frac{4,156 \cdot 918 \cdot 1,995 \cdot 0,015^2}{2,35} \cdot 10^3 \text{ s} = 728,8 \text{ s} = 12,15 \text{ min}$$

b) Wegen des schlechten Wärmeüberganges an der Außenseite kann angenommen werden, dass die gesamte Temperaturdifferenz zwischen Wandoberfläche und Umgebung auftritt und damit im Körper eine annähernd einheitliche (aber mit der Zeit veränderliche) Temperatur vorliegt (Annahme des quasistatischen Falls zur Abkühlung im Einphasengebiet).



Der Vorgang kann in 3 Zeitbereiche eingeteilt werden:

1. Abkühlung des Wassers auf t_{Schm}
2. Gefrieren des Wassers
3. Abkühlen des Eises auf t_E

1. Quasistatische Abkühlung der Platte

Es wird angenommen, dass die Platte vollständig aus Wasser besteht. In der ersten Rechnung wird kein Wärmeleitwiderstand in der Platte berücksichtigt.

Biot-Zahl

$$Bi = \frac{\alpha \frac{\delta}{2}}{\lambda_W} = \frac{10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 0,015 \text{ m}}{0,578 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} = 0,26$$

dimensionslose Temperatur (aus Gl.(2.20 im Skript) bei Annahme $\lambda / \lambda_{\text{eff}} \ll 1/Bi$)

$$\vartheta_m = \exp(-Fo Bi)$$

$$\vartheta_m = \frac{t_m - t_U}{t_0 - t_U} = \frac{0 - (-30)}{20 - (-30)} = 0,6$$

$$\rightarrow Fo = \frac{1}{Bi} \ln \frac{1}{\vartheta_m} = \frac{\ln(1/0,6)}{0,26} = 1,97$$

Die Zeit bis zur Abkühlung des Wassers auf t_0 ergibt sich aus der Definition der Fo-Zahl zu

$$\Delta\tau_W = \frac{\rho_W c_W}{\lambda_W} Fo \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{1000 \cdot 4190 \cdot 1,97 \cdot 0,015^2}{0,578} \text{ s} = 3210 \text{ s} = 0,892 \text{ h}.$$

Da die Biot-Zahl über der Grenze des Gültigkeitsbereiches der quasistatischen Lösung ($Bi < 0,1$) liegt, soll noch eine genauere Rechnung mit dem Näherungsverfahren nach Schlünder (Skript, Abschn. 2.2.1) erfolgen.

Der effektive Wärmeleitkoeffizient für den instationären Abkühlvorgang berechnet sich mit der Fo-Zahl aus der obigen Rechnung zu

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2 \lambda_W}{\sqrt{\pi Fo}} = \frac{2 \cdot 0,578}{\sqrt{\pi \cdot 1,97}} \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 0,465 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff},\infty} = \frac{\pi^2}{4} \lambda_W = 1,426 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},\infty}^2)^{1/2} = 1,50 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Aus der Beziehung für die dimensionslose Temperatur nach dem Schlünderverfahren (Skript Gl. (2.20))

$$\vartheta_m = \exp\left(-\frac{Fo}{\frac{1}{Bi} + \frac{\lambda}{\lambda_{\text{eff}}}}\right)$$

ergibt sich für die Fo-Zahl

$$Fo = \left(\frac{1}{Bi} + \frac{\lambda}{\lambda_{\text{eff}}}\right) \ln \frac{1}{\vartheta_m} = 2,16$$

und analog zu obiger Rechnung für die Abkühlzeit

$$\Delta\tau_W = 3526 \text{ s} = 0,979 \text{ h}.$$

Mit diesem Wert soll weitergerechnet werden. Wegen Berücksichtigung des Wärmeleitwiderstandes in der Platte ist dieser Wert größer als nach dem quasistatischen Modell.

2. Gefrieren

Für die Berechnung der Fourier-Zahl bis zum Durchfrieren werden die Biot-Zahl und die Phasenumwandlungszahl benötigt.

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \frac{\delta}{2}}{\lambda_E} = \frac{10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 0,015 \text{ m}}{2,35 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} = 0,06383$$

$$\text{Ph} = \frac{\rho_W \Delta h_{\text{Schm}}}{\rho_E c_{p,E} (t_{\text{Schm}} - t_U)} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 333 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{918 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,995 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} (0 + 30) \text{ K}} = 6,061$$

$$\text{Fo} = \text{Ph} \left(\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{1}{2} \right) = 6,061 \left(\frac{1}{0,06383} + \frac{1}{2} \right) = 97,98$$

Damit ergibt sich für die Gefrierzeit der Platte

$$\Delta \tau_{\text{Schm}} = \frac{\text{Fo} \rho_E c_{p,E} (\delta/2)^2}{\lambda_E} = \frac{97,98 \cdot 918 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,995 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 0,015^2 \text{ m}^2}{2,35 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} = 17181 \text{ s} = 4,772 \text{ h}$$

3. Abkühlen des Eises

Zuerst wird die Fo-Zahl mit dem quasistatischen Modell berechnet.

$$\text{Bi} = 0,06383, \quad \vartheta_m = \frac{t_E - t_U}{t_{\text{Schm}} - t_U} = 0,333$$

$$\text{Fo} = \frac{1}{\text{Bi}} \ln \frac{1}{\vartheta_m} = \frac{\ln 3}{0,06383} = 17,2$$

Das Ergebnis für Fo nach der quasistatischen Rechnung wird als Startwert bei dem Schlünderverfahren verwendet.

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2 \lambda_E}{\sqrt{\pi \text{Fo}}} = \frac{2 \lambda_E}{\sqrt{\pi \cdot 17,2}} = 0,272 \lambda_E$$

$$\lambda_{\text{eff},\infty} = 2,467 \lambda_E$$

$$\lambda_{\text{eff}} = (0,272^2 + 2,467^2)^{1/2} \lambda_E = 2,482 \lambda_E$$

$$\text{Fo} = \left(\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{\lambda_E}{\lambda_{\text{eff}}} \right) \ln \frac{1}{\vartheta_m} = \left(\frac{1}{0,06383} + \frac{1}{2,482} \right) \ln 3 = 17,65$$

Damit ergibt sich für die Abkühlzeit des Eises

$$\Delta\tau_E = \frac{\text{Fo} \rho_E c_{p,E} \left(\frac{\delta}{2} \right)^2}{\lambda_E} = 3095 \text{ s} = 0,86 \text{ h}$$

Die gesamte Zeit setzt sich aus den 3 Abschnitten zusammen.

$$\Delta\tau = \Delta\tau_W + \Delta\tau_{\text{Schm}} + \Delta\tau_E = (0,979 + 4,772 + 0,86) \text{ h} = 6,61 \text{ h}$$

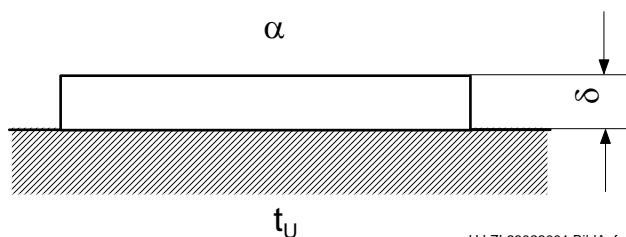
Zum Vergleich soll dieser Aufgabenteil auch nach der Methode in a) berechnet werden, obwohl die Voraussetzungen dafür nicht zutreffen (Wärmetransport spielt sich auch im reinen Einphasengebiet in einem längeren Zeitraum ($\Delta\tau_W + \Delta\tau_E$) ab.)

Es wird mit $\text{Bi} = \text{Bi}_E = 0,06383$ und $\text{Ph} = 8,312$ für

$$\text{Fo} = \text{Ph} \left(\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{1}{2} \right) = 134,4 \text{ und } \tau = 6,54 \text{ h}$$

fast derselbe Wert wie oben erhalten.

c)



HJ.ZI.23022001.BildAufg102.dsf

Wegen des schlechten Wärmeüberganges auf der Luftseite kann diese Wand als adiabat angenommen werden (vgl. $\tau = 12,15$ min mit $\tau = 6,61$ h). Für die andere Wand gilt eine Randbedingung 1. Art. Die Lösung erfolgt deshalb wie bei a), jedoch für eine doppelt so starke Platte. Damit wird

$$\tau = \frac{F_{0E} \rho_E c_{p,E} \delta^2}{\lambda_E} = \frac{4,156 \cdot 918 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1995 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 0,03^2 \text{ m}^2}{2,35 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} = 2915 \text{ s} = 48,6 \text{ min.}$$

Die Gefrierzeit nimmt quadratisch mit der Dicke zu, deshalb gilt

$$\tau_c = 2^2 \tau_a = 4 \tau_a .$$

d) Die Phasengrenzgeschwindigkeit in der Mitte der Platte berechnet sich nach folgender Beziehung

$$\frac{dx}{d\tau} = - \frac{\lambda_E \alpha (t_{\text{Schm}} - t_U)}{\rho_W \Delta h_{\text{Schm}} (\alpha \delta / 2 + \lambda_E)} = - \frac{\lambda_E (t_{\text{Schm}} - t_U)}{\rho_W \Delta h_{\text{Schm}} \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\lambda_E}{\alpha} \right)}$$

Für Fall a) mit $\alpha = \infty$ ergibt sich $dx/d\tau = - 1,03 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = - 37 \text{ mm/h}$, für Fall b) $dx/d\tau = - 3,05 \text{ mm/h}$.

Entsprechend den gewählten Modellen wurde bei a) mit Δh_{Schm}^* und bei b) mit Δh_{Schm} gerechnet.

Lösung Aufgabe 2.9:

Gegeben: Stahlkugel $d_K = 5 \text{ cm}$, $\lambda_K = 12 \text{ W/(m K)}$, $\rho_K = 7900 \text{ kg/m}^3$
 $c_{p,K} = 480 \text{ J/(kg K)}$, $t_{0,K} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$

Ölbad $V_B = 1 \text{ l}$, $c_{p,B} = 220 \text{ J/(kg K)}$, $\rho_B = 900 \text{ kg/m}^3$
 $t_{0,B} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Wärmeübergangskoeffizient $\alpha = 250 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

Gesucht: a) t_K und t_B nach $\tau = 100 \text{ s}$, analytische Lösung
 b) t_K und t_B nach $\tau = 100 \text{ s}$, numerische Lösung

a) Wärmekapazitäten von Stahlkugel und Ölbad

$$C_K = \rho_K c_{pK} \frac{\pi}{6} d_K^3 = 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 480 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \frac{\pi}{6} 0,05^3 \text{ m}^3 = 248,19 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$C_B = \rho_B c_{pB} V_B = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 2200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} 0,001 \text{ m}^3 = 1980 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Temperaturleitkoeffizient für Stahlkugel

$$a_K = \frac{\lambda_K}{\rho_K c_{pK}} = \frac{12 \text{ W/(m K)}}{7900 \text{ kg/m}^3 480 \text{ J/(kg K)}} = 3,164 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

mittlere Fo-Zahl während der Abkühlungszeit (hier arithmetisches Mittel verwendet, mit Mathcad auch Rechnung für λ_{eff} an 5...10 Stützstellen möglich)

$$Fo_m = \frac{a_K \tau/2}{(d_K/2)^2} = \frac{3,164 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} 50 \text{ s}}{0,025^2 \text{ m}^2} = 0,253$$

effektive Wärmeleitkoeffizienten für instationäre Abkühlung
 (Notwendigkeit der Verwendung des Schlünderverfahrens wegen $Bi > 0,1$)

$$Bi = \frac{\alpha d_K/2}{\lambda_K} = \frac{250 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,025 \text{ m}}{12 \text{ W/(m K)}} = 0,52 > 0,1$$

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2 \lambda}{\sqrt{\pi Fo_m}} = \frac{2 \cdot 12 \text{ W/(m K)}}{\sqrt{\pi \cdot 0,253}} = 26,91 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff},\infty} = 3,29 \lambda_K = 3,29 \cdot 12 \text{ W}/(\text{m K}) = 39,48 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \left(\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},\infty}^2 \right)^{0,5} = \left(29,91^2 + 39,48^2 \right)^{0,5} \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 47,78 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Wärmewiderstand zwischen Stahlkugel und Ölbad

$$R_{KB} = \frac{1}{\pi d_K^2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{d_K/2}{\lambda_{\text{eff}}} \right) = \frac{1}{\pi 0,05^2 \text{ m}^2} \left(\frac{1}{250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}} + \frac{0,025 \text{ m}}{47,78 \frac{\text{W}}{\text{m K}}} \right)$$

$$R_{KB} = 0,576 \text{ K/W}$$

Der Widerstand in der Stahlkugel beträgt etwa 11 % vom gesamten Widerstand. Das ist auch der Fehler, wenn mit der quasistatischen Lösung und nicht mit dem Schlünderverfahren gearbeitet wird.

Es wird das Verfahren für diskontinuierliche Systeme (hier mit 2 Teilsystemen) verwendet.

Energiebilanzen für Stahlkugel und Ölbad

$$C_K \frac{dt_K}{d\tau} = - \frac{t_K - t_B}{R_{KB}} \quad \text{K - Stahlkugel, B - Ölbad}$$

Annahme:

- gut durchmisches Ölbad

$$C_B \frac{dt_B}{d\tau} = + \frac{t_K - t_B}{R_{KB}} \quad \text{- Rechnung mit Mittelwert für Stahlkugel}$$

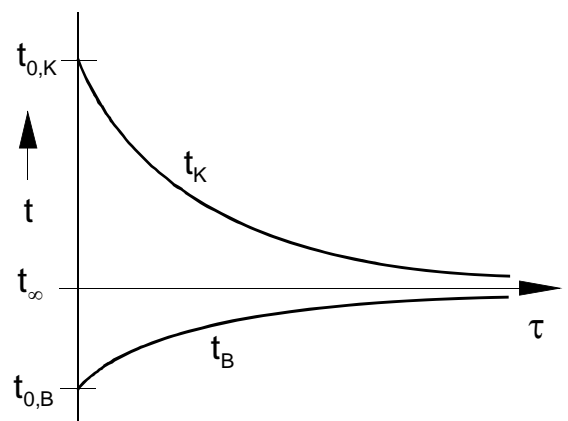
Lösen des Gleichungssystems ist durch neue Variable $\Delta t = t_K - t_B$ möglich.

$$dt_K - dt_B = d(t_K - t_B) = - \frac{t_K - t_B}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K} \right) d\tau$$

$$\int_{\Delta t_0}^{\Delta t} \frac{d(t_K - t_B)}{t_K - t_B} = \frac{-1}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K} \right) \int_0^{\tau} d\tau$$

$$\ln \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = - \frac{1}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K} \right) \tau$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \exp \left(- \frac{1}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K} \right) \tau \right)$$



$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{t_K - t_B}{t_{0,K} - t_{0,B}}$$

$$= \frac{t_K - t_\infty}{t_{0,K} - t_\infty}$$

$$= \frac{t_B - t_\infty}{t_{0,B} - t_\infty}$$

Wegen Energiebilanz müssen auch diese Verhältnisse gelten (bei Wagner „Wärmeübertragung“ S.41 lange Herleitung)

Stationäre Temperatur aus stationärer Energiebilanz

$$t_\infty = \frac{C_B t_{0,B} + C_K t_{0,K}}{C_B + C_K} = \frac{1980 \cdot 20 + 248,19 \cdot 300}{1980 + 248,19} \text{ °C} = 51,188 \text{ °C}$$

Temperaturverlauf für Stahlkugel

$$t_K = t_\infty + (t_{0,K} - t_\infty) \exp\left(-\frac{1}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K}\right) \tau\right)$$

Temperaturverlauf für Ölbad

$$t_B = t_\infty + (t_{0,B} - t_\infty) \exp\left(-\frac{1}{R_{KB}} \left(\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_K}\right) \tau\right)$$

τ	s	0	20	40	60	80	100
t_K	°C	300	263,75	232,78	206,33	183,72	164,41
t_B	°C	20	24,54	28,43	31,74	34,58	37,00

b) Numerische Berechnungsverfahren (siehe Skript S.49 ff)
maximale Zeitschrittweite für explizites Verfahren

$$\Delta\tau_{\max,K} = 0,5 \cdot 2 C_K R_{KB} = 248,19 \frac{\text{J}}{\text{K}} 0,576 \frac{\text{K}}{\text{W}} = 142,9 \text{ s}$$

(auch Richtwert für implizite Verfahren bei Anfangsschritten)

Verfahren von Euler

$$f_K = \left(\frac{dt_K}{d\tau}\right)_k = -\frac{t_{K,k} - t_{B,k}}{R_{KB} C_K}, \quad t_{K,k+1} = t_{K,k} + \Delta\tau f_K$$

$$f_B = \left(\frac{dt_B}{d\tau}\right)_k = -\frac{t_{K,k} - t_{B,k}}{R_{KB} C_B}, \quad t_{B,k+1} = t_{B,k} + \Delta\tau f_B$$

$$\Delta\tau_1 = 20 \text{ s (5 Schritte)} \quad \begin{array}{l} t_K = 156,83 \text{ °C (+5,6\%)} \\ t_B = 37,95 \text{ °C (+5,6\%)} \end{array}$$

$$\Delta\tau_2 = 100 \text{ s (1 Schritt)} \quad \begin{array}{l} t_K = 104,11 \text{ °C (+44,5\%)} \\ t_B = 44,56 \text{ °C (+44,5\%)} \end{array}$$

Fehler bezogen auf Temperaturänderung Δt

Verfahren von Heun

$$\frac{(t_{K,k+1} - t_{K,k})}{\Delta\tau} = - \frac{0,5 (t_{K,k+1} + t_{K,k}) - 0,5 (t_{B,k+1} + t_{B,k})}{R_{KB} C_K}$$

$$\frac{(t_{B,k+1} - t_{B,k})}{\Delta\tau} = + \frac{0,5 (t_{K,k+1} + t_{K,k}) - 0,5 (t_{B,k+1} + t_{B,k})}{R_{KB} C_B}$$

2 Gln. mit 2 Unbekannten $(t_{K,k+1}, t_{B,k+1})$

Lösen durch Eliminationsmethode ($\hat{=}$ Matrizenverfahren)

$$\Delta\tau_1 = 20 \text{ s: } t_K = 164,23 \text{ °C (+0,13\%)}, \quad t_B = 37,02 \text{ °C}$$

$$\Delta\tau_2 = 100 \text{ s: } t_K = 159,45 \text{ °C (+3,7\%)}, \quad t_B = 37,62 \text{ °C}$$

Verfahren von Heun wird hier so gehandhabt, als ob unendlich viele Iterationsschritte zur Ermittlung des Zustandes $k + 1$ vorgenommen würden.

Runge-Kutta-Verfahren (Skript S.51)

4 Schrittverfahren

$$1. \text{ Schritt: } k_{1,K} = f(t_{K,k}, t_{B,k}), \quad k_{1,B} = f(t_{K,k}, t_{B,k}) \text{ wie Euler } (k_{1,K} = f_K)$$

$$2. \text{ Schritt: } t_{K,2} = t_{K,k} + \frac{\Delta\tau}{2} k_{1,K}, \quad t_{B,2} = t_{B,k} + \frac{\Delta\tau}{2} k_{1,B}$$

$$k_{2,K} = - \frac{t_{K,2} - t_{B,2}}{R_{KB} C_K}, \quad k_{2,B} = \frac{t_{K,2} - t_{B,2}}{R_{KB} C_B}$$

$$3. \text{ Schritt: } t_{K,3} = t_{K,k} + \frac{\Delta\tau}{2} k_{2,K}, \quad t_{B,3} = t_{B,k} + \frac{\Delta\tau}{2} k_{2,B}$$

$$k_{3,K} = - \frac{t_{K,3} - t_{B,3}}{R_{KB} C_K}, \quad k_{3,B} = \frac{t_{K,3} - t_{B,3}}{R_{KB} C_B}$$

$$4. \text{ Schritt: } t_{K,4} = t_{K,k} + \Delta\tau k_{3,K}, \quad t_{B,4} = t_{B,k} + \Delta\tau k_{3,B}$$

$$k_{4,K} = -\frac{t_{K,4} - t_{B,4}}{R_{KB} C_K}, \quad k_{4,B} = \frac{t_{K,4} - t_{B,4}}{R_{KB} C_B}$$

neue Temperatur ($\Delta\tau_2 = 100$ s)

$$t_{K,k+1} = t_{K,k} + \frac{\Delta\tau}{6} (k_{1,K} + 2k_{2,K} + 2k_{3,K} + k_{4,K})$$

$$t_{B,k+1} = t_{B,k} + \frac{\Delta\tau}{6} (k_{1,B} + 2k_{2,B} + 2k_{3,B} + k_{4,B})$$

$$t_{K,k+1} = 164,97 \text{ °C } (-0,4\%), \quad t_{B,k+1} = 36,93 \text{ °C } (-0,4\%)$$

Überprüfung der Schrittweite : optimaler Bereich

$$0,025 < \left| \frac{k_{3,K} - k_{2,K}}{k_{2,K} - k_{1,K}} \right| < 0,1$$

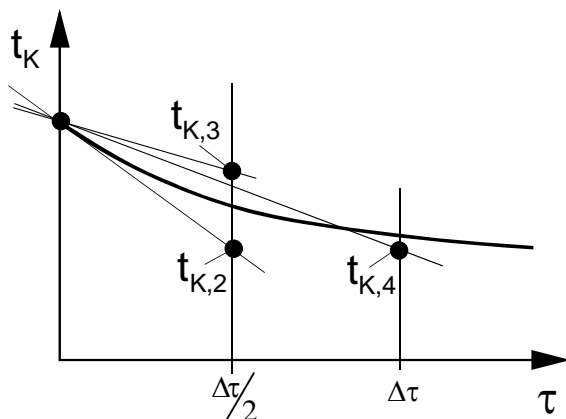
Parameter liegt bei $\Delta\tau_2 = 100$ s außerhalb des optimalen Bereiches (0,394). Bei $\Delta\tau_1 = 20$ s ist Parameter 0,079 (im optimalen Bereich) und Ergebnisse sind auf 5 Stellen exakt. Trotz der großen Schrittweite von $\Delta\tau_2 = 100$ s sind obige Ergebnisse aber sehr genau.

- Schritte bei Runge-Kutta: (nach Math-Cad)

k =	1	2	3	4	Ergebnis
$t_{K,k}$	300	202,053	240,611	150,864	164,967
$t_{B,k}$	20	32,277	27,444	38,694	36,926
$k_{K,k}$	- 1,959	- 1,188	- 1,491	- 0,785	
$k_{B,k}$	0,246	0,149	0,187	0,098	

richtige Werte

$$k_K = (t_{K,k+1} - t_{K,k}) / \Delta\tau = -1,3559 \text{ K/s}, \quad f_B = 0,17 \text{ K/s}$$



Die Zwischenwerte liegen über und unter dem richtigen Verlauf. Durch die Wichtung der einzelnen Werte kommt ein sehr gutes Ergebnis zustande.

- Bildung eines besseren Mittelwertes für λ_{eff} :

Berechnung in 10 Abschnitten von $\lambda_{\text{eff},0}$ und λ_{eff} und dann Mittelwert bilden

$$\lambda_{\text{eff},0,k} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi \text{Fo}_k}}, \quad \text{Fo}_k = \frac{a_K \tau_k}{(d_K/2)^2}, \quad \lambda_{\text{eff},k} = \left(\lambda_{\text{eff},0,k}^2 + \lambda_{\text{eff},\infty}^2 \right)^{0,5}$$

τ	s	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
Fo	-	0,0253	0,0759	0,126	0,177	0,228	0,278	0,329	0,38	0,43	0,581
$\lambda_{\text{eff},0}$	W/mK	85,1	49,14	38,06	32,17	28,37	25,66	23,60	21,97	20,64	19,52
λ_{eff}	W/mK	93,82	63,03	54,84	50,925	48,616	47,09	46,0	45,18	44,55	44,04

$$\lambda_{\text{eff},m} = \frac{1}{10} \sum \lambda_{\text{eff}} = 53,81 \text{ W/mK}$$

Der oben verwendete Wert von $\lambda_{\text{eff}} = 47,78 \text{ W/mK}$ hat einen Fehler von $-11,2\%$.

Anwendung in Praxis

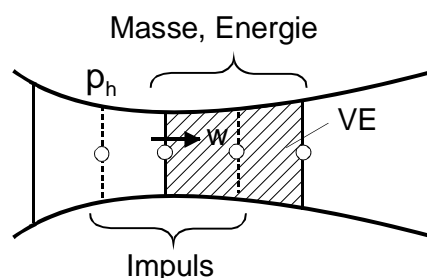
Das Verfahren für diskontinuierliche Systeme kann auch für andere instationäre Vorgänge (z. B. Strömungsvorgänge) in großen Systemen angewendet werden. Speziell für Kernkraftwerke werden die kommerziellen Programme RELAP (USA), ATHLET (Garching) und CATHARE (Frankreich) angeboten.

Die Programme haben einen modularen Aufbau, z. B. Module für Eingabe, Thermofluidynamik, Wärmetransport, Neutronenkinetik, Simulationsteil, Ausgabe.

Das hydrodynamische Modell besteht aus einem 3-6 Gleichungssystem (Masse-, Impuls-, Energiegleichung für jede Phase (liefert 6 Gleichungen) oder Gemisch (liefert 3 Gleichungen)).

Zur Lösung des Gleichungssystems sind zusätzlich konstitutive Modelle (z. B. α , ξ , Stoffwerte, Kondensationsmodell, Reibungsmodell, Driftmodell, Verdampfungsmodell, Stoffaustauschmodell) notwendig, die meist empirischen Charakter haben.

Die Bilanzierung im Kontrollvolumen erfolgt für skalare Größen im VE (z. B. p , h , ε , ...) und für Vektorgrößen am Rand des VE (w_V , w_L , ...).



Nach der Integration des Differentialgleichungssystems (meist wird Euler-Verfahren verwendet) erhält man die zeitlichen Verläufe der interessierenden Parameter (z. B. Massestrom, Druck, Temperatur) in den VE.

Lösung mit Mathcad und Excel

1. Lösung der Differentialgleichung mit Mathcad

Anfangsbedingung setzen $t \equiv \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

1. Ableitungen als Matrix schreiben (mit Index 0 beginnen)

$$D(\tau, t) := \begin{bmatrix} \frac{-(t_0 - t_1)}{R_{KB} C_K} \\ \frac{t_0 - t_1}{R_{KB} C_B} \end{bmatrix}$$

Aufruf der Funktion rkfest $T := \text{rkfest}(t, 0, 100, 5, D)$

t	gesuchte Variable
0 und 100	Anfangs- und Endzeit
5	Anzahl Schritte

Mathcad verwendet ein 4 Schritt - Runge-Kutta-Verfahren.

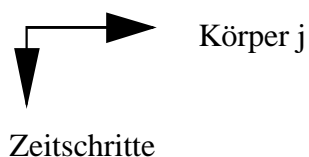
2. Heun-Verfahren mit Excel

Umformen der Gln. nach $t_{K,k+1}$ bzw. $t_{B,k+1}$

$$t_{K,k+1} = \frac{\frac{0,5}{R_{KB}} (t_{B,k+1} + t_{B,k} - t_{K,k}) + \frac{C_K}{\Delta\tau} t_{K,k}}{\frac{C_K}{\Delta\tau} + \frac{0,5}{R_{KB}}}$$

$$t_{B,k+1} = \frac{\frac{0,5}{R_{KB}} (t_{K,k+1} + t_{K,k} - t_{B,k}) + \frac{C_B}{\Delta\tau} t_{B,k}}{\frac{C_B}{\Delta\tau} + \frac{0,5}{R_{KB}}}$$

Beide Gln. für jeden Zeitschritt in Zellen schreiben und iterativ lösen.
Anordnung z. B.



Es liegt eine sehr gute Konvergenz vor, da der Fehler nach 3 Iterationsschritten $< 3 \cdot 10^{-5}$ K für den 5. Zeitschritt beträgt.

Lösung Aufgabe 2.10:

Gegeben: Stahlblock $H \times B = 10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$, $t_0 = 700 \text{ °C}$
 $\lambda = 14 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 0,54 \text{ kJ/(kg K)}$, $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$
 Luft $t_U = 25 \text{ °C}$, $\alpha = 10 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
 Ortsschrittweite $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ cm}$

Gesucht: Programmablaufplan für explizites Verfahren

Voraussetzungen: konstante Stoffwerte
 konstante Randbedingungen
 2 dimensional (unendlich langer Balken)
 quadratische Elemente im Körper

} laut Aufgabenstellung

Skizze eines Viertels des Querschnitts (wegen Symmetrie des Temperaturfeldes möglich)

	→	x								
↓		42	42	42	42	42	42	42	42	42
y	42	33	34	35	36	37	38	39	40	41
	42	25	26	27	28	29	30	31	32	41
	42	17	18	19	20	21	22	23	24	41
	42	9	10	11	12	13	14	15	16	41
	42	1	2	3	4	5	6	7	8	41
		41	41	41	41	41	41	41	41	

n Nummer des Volumenelementes (VE)
 m = 40 Gesamtzahl der VE im Innern (im Körper)

Angrenzende VE im Innern (hinter Symmetriegrenze) bzw. am Rand wurden nur mit je einer Nummer bezeichnet, da konstante Randbedingungen vorliegen bzw. wegen Symmetrieeigenschaften im Innern (Nr. 42 nur Hilfselement für spätere Rechnung).

Die Einteilung in VE erfolgte so, dass in Richtung des größten Wärmestromes 5 Elemente liegen.

Anwendung des universellen expliziten Verfahrens (da Problem zweidimensional)

Ermittlung der Widerstände zwischen den VE:

Widerstände für innere Verbindungen (für $j(n) = 1 \dots 40$) (Skript S.55)

$$R_{j(n)} = \left(\frac{\Delta x_{j(n)}}{2 \lambda_{j(n)}} + \frac{\Delta x_n}{2 \lambda_n} \right) \frac{1}{A_{j(n)}} = \frac{1}{\lambda L} = \frac{1}{14 \frac{\text{W}}{\text{m K}} 1 \text{ m}} = 0,07143 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

j Nachbarerlement von n, Δx und λ für alle $j(n)$ ($j = 1-40$) gleich, ebenso für Δy .

Widerstand für Randverbindungen (für $j(n) = 41$)

$$R_{j(n)} = \left(\frac{1}{\alpha_{j(n)}} + \frac{\Delta x_n}{2 \lambda_n} \right) \frac{1}{A_{j(n)}} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Delta x}{2 \lambda} \right) \frac{1}{\Delta x L} = \left(\frac{1}{10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}} + \frac{0,01 \text{ m}}{2 \cdot 14 \text{ W}/(\text{m K})} \right) \frac{1}{0,01 \text{ m} 1 \text{ m}}$$

$$= 10,036 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Bestimmung der Kapazitätsgröße ($n = 1 \dots 40$):

$$C_n = \rho_n c_{p,n} \Delta x \cdot \Delta y \cdot L = 8000 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 0,54 \text{ kJ}/(\text{kg K}) \cdot 0,01^2 \text{ m}^2 1 \text{ m} = 432,0 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die Kapazität ist für alle VE gleich, da gleiches Volumen, konstante Stoffwerte und konstante Zeitschrittweite für alle VE gelten.

Bestimmung der Zeitschrittweite:

Stabilitätsgrenze (Skript S.56)

$$Fo^+ = \frac{\Delta \tau}{2 C_n} \sum_{j(n)} \frac{1}{R_{j(n)}} \leq 0,5$$

Bei maximal zulässiger Zeitschrittweite ist $\Delta \tau \leq \frac{C_n}{\sum_{j(n)} \frac{1}{R_{j(n)}}$

Für Element in Mitte wird

$$\Delta \tau = \frac{432 \text{ J/K}}{4 \cdot \frac{1}{0,07143 \text{ K}}} = 7,71 \text{ s}$$

und für Element am Rand (z. B. $n = 2$)

$$\Delta \tau = \frac{432 \text{ J/K}}{\left(3 \frac{1}{0,07143} + \frac{1}{10,036} \right) \frac{\text{W}}{\text{K}}} = 10,26 \text{ s}$$

gewählt $\Delta \tau = 7,5 \text{ s}$.

Die Zeitschrittweite ist konstant für alle Zeitschritte, da konstante Stoffwerte und konstante Randbedingungen vorliegen.

Diskussion zur Zahl der Zeitschritte:

Bei näherungsweise Lösung der Aufgabe mit dem Umdruck zu TTI/WÜ S. 27 (Mitteltemperatur unendlicher Zylinder) ergibt sich für einen Vollzylinder mit dem äquivalenten Radius 6,15 cm für die Abkühlung bis auf $\frac{t_m - t_U}{t_0 - t_U} = 0,1$ ($t_m = 92,5^\circ\text{C}$) eine Zeit von $\tau \approx 8,8$ h ($Bi = 0,044$, $Fo = 27$). Dafür werden

$$k_{\text{ges}} = \frac{\tau}{\Delta\tau} = \frac{8,8 \cdot \text{h} \cdot 3600 \text{ s/h}}{7,5 \text{ s}} = 4224 \text{ Zeitschritte benötigt.}$$

Mittlere Temperaturänderung während eines Zeitschrittes

$$\frac{(t_0 - t_m)_{\text{ges}}}{k_{\text{ges}}} = \frac{(700 - 92,5)\text{K}}{4224} = 0,14 \text{ K.}$$

Es ergibt sich eine sehr geringe Temperaturänderung pro Zeitschritt und damit viele Zeitschritte (\rightarrow aufwändiges, z. T. unökonomisches Verfahren).

Bildung von Feldern

Nr.	Inhalt	Größe	Bemerkung
1.	$t_{\text{alt}}(n)$	40 +2	} 40 innere Elemente, 2 Randelemente (41,42) eindimensionale Felder, } $n = 1 \dots 42$ ($n = 41,42$ könnten entfallen, da konstant)
2.	$t_{\text{neu}}(n)$	40 +2	
3.	$j_n(j,n)$	160	} 40 innere Elemente mit je 4 Verbindungen } $j_n(j,n)$ und $l(j,n)$ zweidimensionale Felder } $j = 1, \dots, 4$, $n = 1 \dots 40$
4.	$R(j,n)$	160	

Felder 1,2 und 4 enthalten real-Größen, Feld 3 integer-Größen.

Z. B. Element $n = 1$ zur Zeit $k = 0$ (Anfangszeit)

$$t_{\text{alt}}(1) = 700^\circ\text{C} \text{ (Anfangstemperatur bei } \tau = 0)$$

$$j_n(j,n): \quad j_n(1,1) = 2, \quad j_n(2,1) = 41, \quad j_n(3,1) = 42, \quad j_n(4,1) = 9$$

$$R(j,n): \quad R(1,1) = 0,07143, \quad R(2,1) = 10,036, \quad R(3,1) = \infty, \quad R(4,1) = 0,07143$$

(Da nur 3 verschiedene Möglichkeiten für die Widerstände bestehen, kann auch mit Index und Zuweisung gearbeitet werden.)

2 Möglichkeiten für Verbindung zu Elementen 42:

- a) $R(i,n) = \infty$, bedeutet ideale Isolierung \rightarrow kein Wärmestrom über Symmetriegrenze
 b) $t(42) = t(1)$ wegen Symmetrie gleiche Temperatur \rightarrow kein Wärmestrom über Symmetriegrenze.

Berechnungsgleichung

$$t_{\text{neu}}(n) = t_{\text{alt}}(n) + \frac{\Delta\tau}{C_n} \sum_{j=1}^4 \frac{(t_{\text{alt}}(i) - t_{\text{alt}}(n))}{R_{j(n)}}, \quad i = jn(j, n)$$

$$\text{alt} \hat{=} k, \quad \text{neu} \hat{=} k + 1 ;$$

$i = jn(j, n)$ Diese Umformung ist nötig, da $t(jn(j, n))$ nicht erlaubt ist (ein Feld darf nicht als Index in einem Feld stehen), deshalb erst neuen Index berechnen.

Ein Programmablaufplan (in ALGOL) ist im Anhang angegeben.

Lösung der Aufgabe mit Excel

Mit Hilfe des Zirkelbezuges kann auch Excel zur Berechnung von DO-Schleifen verwendet werden. Eine Durchrechnung des Tabellenblattes entspricht einem Zeitschritt. Excel rechnet zeilenweise nach unten.

Folgender Programmablauf ist möglich (vgl. Excel-Beispiel):

1. Eingabe der Größen λ , ρ , c_p , t_0 , t_U , α , Δx , Δy , H , B
2. Berechnung der Größen R_λ , R_α , C , $\Delta\tau_{\text{max}}$
(R-Widerstände zwischen den Elementen)
3. Eingabe der gewählten Zeitschrittweite ($< \Delta\tau_{\text{max}}$)
4. Parameter für Rechnung eingeben, z. B. $K = 1$ für Start, $K = 2$ für Rechnung
(K Bezeichnung eines Feldes.)
5. Temperaturfeld für Start eingeben, Feldelemente entsprechend der realen Lage der VE auch in Excel-Tabelle anordnen.
Dieses Temperaturfeld dient bei der Rechnung als altes Temperaturfeld, deshalb Wenn-Bedingung verwenden, z. B. =Wenn ($K = 1$; Startwert t_0 ; neuer Temperaturwert). Mit der Angabe des Feldelementes für den neuen Temperaturwert (untere Tabelle) wird ein Zirkelbezug erzeugt.
6. Neues Temperaturfeld berechnen (analoge Anordnung wie beim alten Temperaturfeld darunter).
Für jedes VE Gl. $t_{\text{neu}} = t_{\text{alt}} + f(t_{\text{alt}})$ in Feldelement eintragen (Temperaturen vom alten Temperaturfeld verwenden).
Vorteilhaft mit \$ (Dollarzeichen) bei festen Feldelementen arbeiten, um Feld durch Kopieren zu erzeugen (Achtung: VE am Rand und an Symmetrieachse sind anders !), \$ mit **F4** - Taste erzeugen.
7. Zahl der Zeitschritte und die Zeit aufsummieren
(mit =Wenn($K = 1; 1; FE+1$), FE bedeutet selbes Feldelement. Damit wird die Anzahl Zeitschritte aufsummiert.
8. Ausgabe von ausgewählten Zeitschritten, zuerst Vorgabe der wievielte Zeitschritt (z. B. $M = 100$) ausgegeben werden soll, z. B.

= Wenn($N < M$; 0; Wenn ($N = M$; t_{neu} ; Wenn ($N > M$; selbes FE)

N Nr. des Zeitschrittes

9. Berechnung vornehmen.

Nach Programmaufruf stets Zirkelbezug aktivieren (Extras, Optionen, Berechnung, Iteration, Iterationszahl eingeben (z. B. 1)). Bei Rechnung zuerst $K = 1$ eingeben (Start), dann $K = 2$ für Rechnung. Mit F9-Taste Rechnung fortführen.

10. Ergebnisse testen.

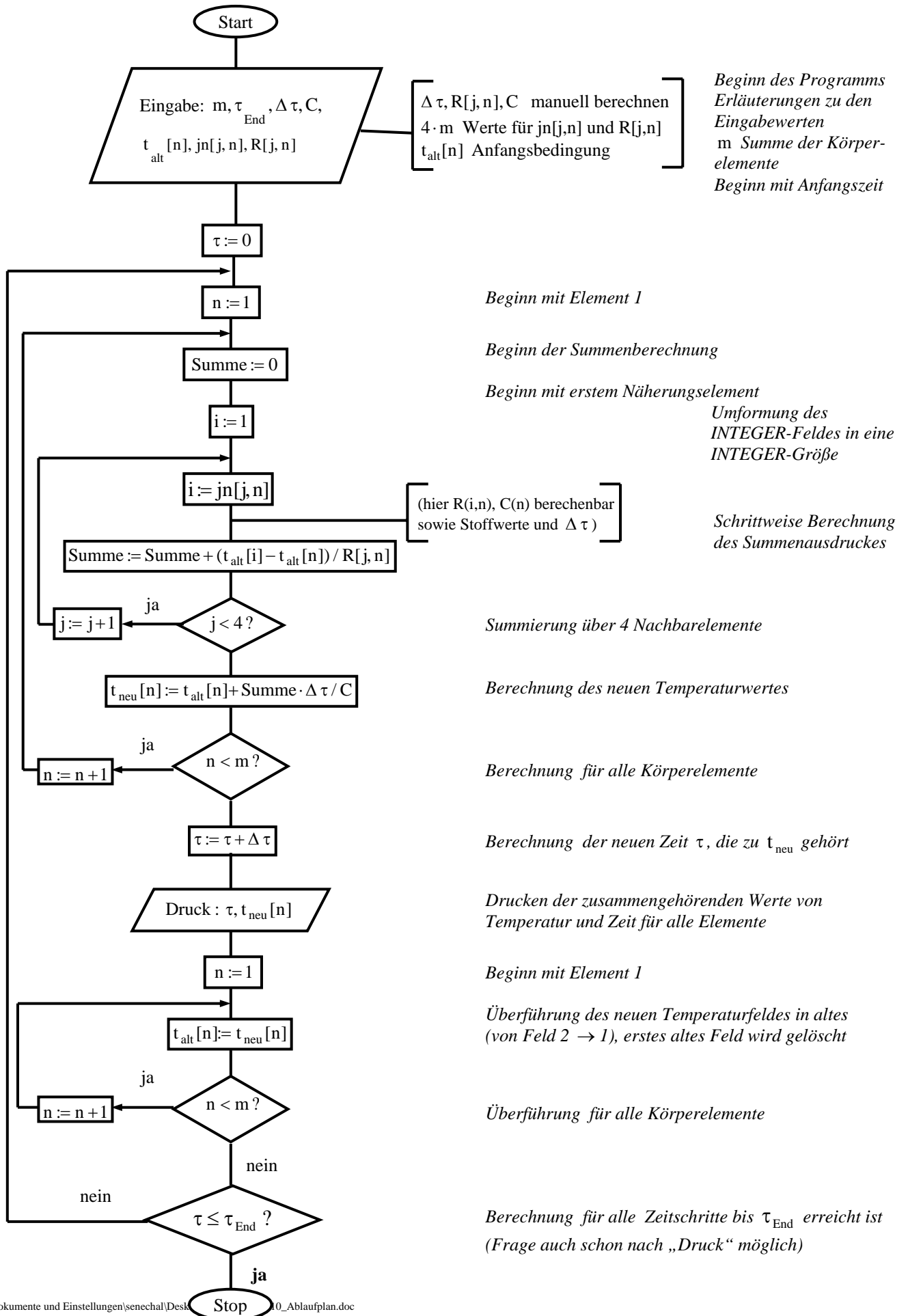
Vergleich mit Gröberlösung (hier Superposition von 2 Platten) vornehmen (geht nur bei einfachen Bedingungen: $t_0 = \text{const}$, $t_U = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, Stoffwerte const).

Wenn Programm richtig rechnet, dann im Programm auch kompliziertere Bedingungen einbauen. Für temperaturabhängige Stoffwerte oder zeitabhängige α mit Makros arbeiten.

Programm für zweidimensionales instationäres Temperaturfeld mit konstanten Stoffwerten und konstanten Randbedingungen

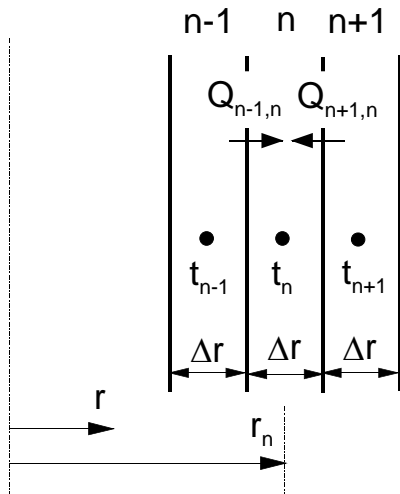
Programmablaufplan (in ALGOL)

Erläuterungen



Lösung Aufgabe 2.11:**Gegeben:** Zylinder mit radialem Wärmestrom**Gesucht:** Differenzgleichungen zur Berechnung des instationären Temperaturfeldes

a)



Einteilung des Zylinders in Kreiströme mit der Dicke Δr vornehmen. Aus der instationären Energiebilanz für den Kreisring n ergibt sich die Berechnungsgleichung für die neue Temperatur $t_{n,k+1}$.

$$\Delta\tau(\dot{Q}_{n-1,n} + \dot{Q}_{n+1,n}) = \Delta U_n = U_{n,k+1} - U_{n,k}$$

$$\dot{Q}_{n-1,n} = \frac{\lambda}{\Delta r} A_{m,n-1,n} (t_{n-1,k} - t_{n,k})$$

$$A_{m,n-1,n} \approx 2\pi L \left(r_n - \frac{\Delta r}{2} \right)$$

L Länge des Zylinders

$$\dot{Q}_{n+1,n} = \frac{\lambda}{\Delta r} A_{m,n+1,n} (t_{n+1,k} - t_{n,k})$$

$$A_{m,n+1,n} \approx 2\pi L \left(r_n + \frac{\Delta r}{2} \right)$$

$$\Delta U_n = \rho c_p V_n (t_{n,k+1} - t_{n,k})$$

$$V_n \approx 2\pi r_n L \Delta r$$

Mit $Fo^+ = \frac{a \Delta\tau}{(\Delta r)^2}$, $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ ergibt sich nach Einsetzen

$$t_{n,k+1} = t_{n,k} + Fo^+ \left[t_{n-1,k} + t_{n+1,k} - 2t_{n,k} + \frac{\Delta r}{2r_n} (t_{n+1,k} - t_{n-1,k}) \right]$$

Bei $r_n \rightarrow \infty$ ergibt sich die Lösung für die ebene Wand.

b) Die Fouriersche Differentialgleichung für den eindimensionalen Fall in Zylinderkoordinaten, bei konstanten Stoffwerten und ohne Wärmequellen lautet

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right)$$

Diese Gleichung erhält man aus der vollständigen Gleichung $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} t + \frac{\dot{q}_E}{\rho c_p}$

bzw. mit Zylinderkoordinaten geschrieben

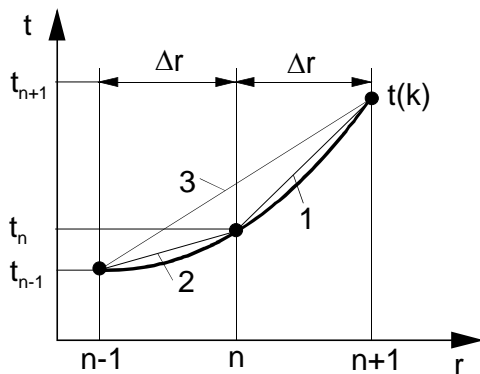
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}}_0 \right) + \underbrace{\frac{\dot{q}_E}{\rho c_p}}_{0, \text{ wärmequellenfrei}}$$

Die Differenzenapproximation liefert die gesuchte Differenzengleichung

$$\frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau} = a \left(\frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2t_{n,k}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_n} \frac{t_{n+1,k} - t_{n-1,k}}{2 \Delta r} \right)$$

und nach Umstellung dieselbe Lösung für $t_{n,k+1}$ wie oben

$$t_{n,k+1} = t_{n,k} + \operatorname{Fo}^+ \left[t_{n-1,k} + t_{n+1,k} - 2t_{n,k} + \frac{\Delta r}{2 r_n} (t_{n+1,k} - t_{n-1,k}) \right]$$



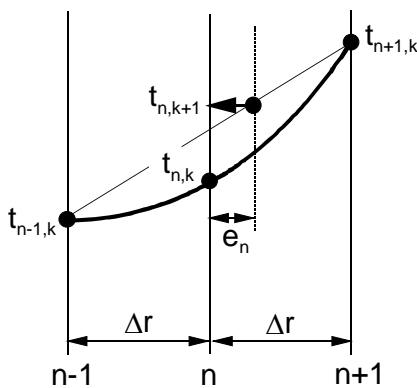
- 1 - vorderer Differentialquotient
- 2 - hinterer Differentialquotient
- 3 - zentraler Differentialquotient

$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}$: Differenz zwischen beiden Anstiegen von $n-1 \rightarrow n$ und $n \rightarrow n+1$ (Linie 2 und 1)

$\frac{\partial t}{\partial r}$: Anstieg zwischen $n-1 \rightarrow n+1$ (Linie 3)

$\frac{\partial t}{\partial \tau}$: Verschiebung des Temperaturverlaufs

c) Es wird angenommen, dass mit einer Hilfsebene eine Lösung erreicht wird, da bei $Fo^+ = \frac{1}{2}$ nur Ausdruck $t_{n,k}$ entfällt und letzter Ausdruck in Differenzgleichung erhalten bleibt (ähnlich wie bei mehrschichtiger Wand). Die Hilfsebene wird auf die Seite des größeren Radius in einem Abstand von e_n gelegt. Der Schnittpunkt der Linie zwischen den beiden Nachbarwerten und der Hilfsebene liefert den neuen Temperaturwert, der an der Stelle r_n gilt. Mit diesen Annahmen wird der Wert für e_n im Folgenden ermittelt. Wenn für e_n ein Ausdruck unabhängig von den aktuellen Temperaturen erhalten wird, ist eine sinnvolle Konstruktion möglich.



Strahlensatz

$$\frac{t_{n,k+1} - t_{n-1,k}}{\Delta r + e_n} = \frac{t_{n+1,k} - t_{n,k+1}}{\Delta r - e_n}$$

$$\rightarrow e_n = \Delta r \frac{t_{n-1,k} + t_{n+1,k} - 2 t_{n,k+1}}{t_{n-1,k} - t_{n+1,k}}$$

Aus der Differenzgleichung in a) ergibt sich mit $Fo^+ = \frac{1}{2}$ und mit 2 multipliziert

$$t_{n-1,k} + t_{n+1,k} - 2 t_{n,k+1} = \frac{\Delta r}{2 r_n} (t_{n-1,k} - t_{n+1,k})$$

In e_n eingesetzt, wird damit

$$e_n = \frac{(\Delta r)^2}{2 r_n}$$

Bei einer ebenen Wand gilt $r_n \rightarrow \infty$ und es wird $e_n \rightarrow 0$ (Der Grenzwert für die ebene Wand ist damit erfüllt.) Da e_n nur von geometrischen Größen abhängig ist, waren obige Annahmen richtig. Da die Konstruktion durch die Hilfslinien (Linie im Abstand e_n und waagerechte Linie zum Verschieben von $t_{n,k+1}$) bei vielen Zeitschritten unübersichtlich wird, sollte besser mit den obigen Gleichungen gearbeitet werden.

Lösung Aufgabe 2.13:

Gegeben: einseitig unendlich ausgedehnte Wand
Anfangstemperatur t_0 , Randbedingung $t(x=0, \tau > 0) = t_W = 100 \text{ °C}$

$$\text{Lösungsansatz } t = t_W \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a\tau}} k\right)$$

Gesucht: k nach Ritzschen Verfahren

Es wird die instationäre Aufwärmung einer einseitig unendlich ausgedehnten Wand bei Randbedingung 1. Art betrachtet. Die Anfangstemperatur beträgt $t_0 = 0 \text{ °C}$. Zur Zeit $\tau = 0$ springt die Wandtemperatur auf t_W . Ein Lösungsansatz, der die Anfangs- und Randbedingung erfüllt, ist

$$t = t_W \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a\tau}} k\right).$$

Die noch unbekannt Konstante k soll durch das Ritzsche Verfahren ermittelt werden. Das Funktional für die instationäre Wärmeleitung lautet

$$\kappa = \int_V \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} t \right] dV.$$

Mit den Ableitungen der Ansatzfunktion

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -t_W \frac{k}{\sqrt{a\tau}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a\tau}} k\right)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = t_W \left(-\frac{x k}{\sqrt{a}}\right) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a\tau}} k\right) \left(-\frac{1}{2\tau^{3/2}}\right) = t_W \frac{x k}{\sqrt{a\tau} 2\tau} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a\tau}} k\right)$$

und der Längenkoordinate x mit den Integrationsgrenzen 0 und ∞ für das betrachtete Volumen wird das Funktional

$$\begin{aligned} \kappa &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \lambda \frac{t_W^2 k^2}{a\tau} \exp\left(-\frac{2xk}{\sqrt{a\tau}}\right) + \rho c t_W^2 \frac{xk}{\sqrt{a\tau} 2\tau} \exp\left(-\frac{2xk}{\sqrt{a\tau}}\right) \right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \lambda \frac{t_W^2 k^2}{a\tau} + \frac{\rho c t_W^2 k}{2\tau \sqrt{a\tau}} x \right] \exp\left(-\frac{2xk}{\sqrt{a\tau}}\right) dx. \end{aligned}$$

Die Integration für ein Integral der obigen Form liefert bei $c < 0$

$$\int_0^{\infty} (a + b x) e^{c x} dx = \left[\frac{a}{c} e^{c x} + \frac{b}{c^2} (c x - 1) e^{c x} \right]_0^{\infty} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2}.$$

Damit wird mit den entsprechenden Ausdrücken für die Konstanten a , b und c für das Funktional

$$\kappa = + \frac{\lambda t_W^2 k^2}{2 a \tau} \frac{\sqrt{a \tau}}{2 k} + \frac{\rho c t_W^2 k}{2 \tau \sqrt{a \tau}} \frac{a \tau}{4 k^2} = \frac{\lambda t_W^2}{4 \sqrt{a \tau}} k + \frac{\rho c t_W^2 \sqrt{a \tau}}{8 \tau} \frac{1}{k}.$$

Die unbekannte Konstante ergibt sich aus dem Minimum des Funktionals

$$\frac{\partial \kappa}{\partial k} = 0.$$

Mit

$$\frac{\partial \kappa}{\partial k} = \frac{\lambda t_W^2}{4 \sqrt{a \tau}} + \frac{\rho c t_W^2 \sqrt{a \tau}}{8 \tau} \left(-\frac{1}{k^2} \right) = 0$$

wird mit $a = \lambda / (\rho c_p)$

$$k = \left(\frac{\rho c t_W^2 \sqrt{a \tau}}{8 \tau} \frac{4 \sqrt{a \tau}}{\lambda t_W^2} \right)^{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Lösungsfunktion lautet damit

$$t = t_W \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2 a \tau}}\right)$$

bzw. mit dem Parameter $\eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}$

$$t = t_W \exp(-\eta \sqrt{2}) \quad (1)$$

Die exakte Lösung für den vorliegenden Fall ist

$$t = t_W (1 - \text{erf}(\eta)). \quad (2)$$

Die error-function kann mit der Näherungsfunktion

$$\operatorname{erf}(\eta) = \tanh \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0,1 \eta^2 \right) \eta \right\}$$

berechnet werden. Der Vergleich der Näherungslösung mit der exakten Lösung liefert für $t_w = 100 \text{ °C}$ folgende Temperaturwerte

η	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0
t_{exakt}	100	88,75	77,73	57,18	39,65	25,85	15,79	9,01	3,39	0,44	0,001
$t_{\text{Näh}}$	100	86,81	75,36	56,80	42,80	32,26	24,31	18,32	11,98	5,91	1,437

Im wandnahen Bereich ($\eta < 0,5$) liefert die Näherungsfunktion zu niedrige Werte, im wandfernen Bereich ($\eta > 0,5$) zu hohe Werte. Im Mittel werden etwa richtige Werte angegeben, die Genauigkeit der Verteilungsfunktion wird durch die Ansatzfunktion bestimmt. Durch eine Summe von mehreren Ansatzfunktionen kann die Genauigkeit verbessert werden. Eine andere Ansatzfunktion, die auch die Rand- und Anfangsbedingung erfüllt, ist z. B.

$$t = t_w \left(1 - \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{a \tau}} k \right) \right)$$

Sie führt allerdings zu schwierig auswertbaren Integralen.

Korrekt ist eigentlich bei der Integration des Funktional über Raum und Zeit zu integrieren.

$$\kappa = \int_{\tau} \int_V [\dots] dV d\tau$$

Das bringt hier keine Änderung im Ergebnis. Analog hätte auch in diesem Fall gleich über die dimensionslose Variable η integriert werden können.

Bei der Benutzung der Theorie des örtlichen Potentials führt die Ansatzfunktion

$$t = t_2 \exp(-x f(\tau))$$

zu demselben Ergebnis, wobei man hier für die noch unbekannte Funktion f den Ausdruck

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2 a \tau}}$$

erhält.

Diskussion

Eine Verbesserung des Ergebnisses ist durch andere Ansatzfunktion möglich, z. B.

$$t = t_W (1 - \tanh(k \eta)) \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4 a \tau}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = - t_W \frac{k}{\sqrt{4 a \tau}} (\cosh(k \eta))^{-2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = - t_W \frac{k x}{\sqrt{4 a}} \left(- \frac{1}{2 \tau^{3/2}} \right) (\cosh(k \eta))^{-2}$$

Einsetzen in Funktional

$$\kappa = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \lambda \frac{k^2 t_W^2}{4 a \tau} (\cosh(k \eta))^{-4} + \rho c t_W^2 (1 - \tanh(k \eta)) \frac{k}{2 \tau} \eta (\cosh(k \eta))^{-2} \right] dx$$

$$= \frac{\rho c t_W^2}{2 \tau} \int_0^{\infty} \left[\frac{k^2}{4} (\cosh(k \eta))^{-4} + \frac{(1 - \tanh(k \eta)) k \eta}{(\cosh(k \eta))^2} \right] d\eta \sqrt{4 a \tau}$$

Das Minimum kann mit Mathcad für obiges Integral bestimmt werden.

Es ergibt sich $k = 1,08$ (mit Grenzen $0 \rightarrow 200$ wegen Zahlenüberlauf arbeiten). Dieser Wert scheint nicht richtig zu sein, wie der Verlauf für $k = 1,08$ und $1,16$ zeigt (Werte für $k = 1,08$ liegen immer über t_{exakt}).

η	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	2	3
t_{exakt}	88,75	77,73	57,18	39,65	25,85	15,79	9,012	3,391	0,442	0,001
$t_{\text{Näh}}(k = 1,08)$	89,24	78,73	59,30	42,97	30,17	20,68	20,68	7,538	2,625	0,3063
$t_{\text{Näh}}(k = 1,16)$	88,45	77,21	56,67	39,82	27,03	17,90	17,25	5,639	1,913	0,1682

Begründung für Abweichung:

sehr flaches Minimum, evtl. numerische Integration ungenau (aber obere Grenze hat bei $10 - 200$ keinen Einfluss, auch mit höherer Genauigkeit (TOL: = 0,00001 statt 0,001) keine besseren Ergebnisse).

Bei 1. Ansatz liefert Mathcad richtige Werte.

Korrekt muss eine Integration über τ und x vorgenommen werden. Eine Integration über die Zeit bringt aber keine anderen Ergebnisse.

Der Vergleich der exakten Lösung (Gl.(2) ist Näherungsfunktion für $\text{erf}(\eta)$) mit obigem Näherungsansatz liefert für das Argument

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0,1 \eta^2 = k$$

η	0,01	0,1	0,5	1	2
Argument	1,128	1,129	1,153	1,228	1,528

Aus der Tabelle erkennt man, dass k im Bereich von 1,128 bis 1,23 liegen sollte, wenn $\eta \leq 1$ ist.

Test verschiedener Ansatzfunktionen mit Mathcad

(siehe Mathcad-Dokument)

1. Ansatz $t = t_W \exp(-k \eta)$

$$\kappa = A \int_0^{100} \left[\frac{k^2}{4} + k \eta \right] \exp(-2k \eta) d\eta$$

$$k = 1,414$$

2. Ansatz $t = t_W (1 - \tanh(k \eta))$

$$\kappa = A \int_0^{100} \left[\eta k + \frac{k^2}{4(\cosh(k \eta))^2} - k \eta \tanh(k \eta) \right] (\cosh(k \eta))^{-2} d\eta$$

$$k = 1,077$$

3. Ansatz $t = t_W \exp(-k \eta^n)$

$$\kappa = A \int_0^{100} \left[k n \eta^n + n^2 \eta^{2(n-1)} \frac{k^2}{4} \right] (\exp(-k \eta^n))^2 d\eta$$

$$k = 1,721, \quad n = 1,022$$

$$4. \text{ Ansatz} \quad t = t_W \left[\frac{2}{3} \exp(-k_1 \cdot \eta) + \frac{1}{3} \left(\exp(-k_2 \cdot \eta) \right)^n \right]$$

$$\kappa = A \int_0^{100} \left[\frac{2}{3} \frac{k_1 \cdot \eta + k_1^2 / 4}{\exp(2 k_1 \eta)} + \frac{1}{3} \left[k_2 \cdot n \cdot \eta^n + n^2 \eta^{2(n-1)} \frac{k_2^2}{4} \right] \left(\exp(-k_2 \eta^n) \right)^2 \right] d\eta$$

für $n = 2$: $k_1 = 1,374$, $k_2 = 2,987$

$$5. \text{ Ansatz} \quad t = t_W \left[k \exp\left(-\frac{1,5}{k_1} \eta\right) + (1 - k) \left(\exp\left(-\frac{3}{k_2} \eta\right) \right)^2 \right]$$

$$\kappa = A \int_0^{100} \left[k \frac{k_1^2 / 4 + k_1 \eta}{\exp(2 k_1 \eta)} + (1 - k) \frac{2 k_2 \eta^2 + \eta^2 k_2^2}{\left(\exp(+ k_2 \eta^2) \right)^2} \right] d\eta$$

$k = 0,644$

$$A = \frac{\sqrt{4 a \tau} \rho c t_W^2}{2\tau} \quad \text{Konstante}$$

Vorgehensweise mit Mathcad:

- Ableitung der Ansatzfunktionen $\frac{\partial t}{\partial x}$ und $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ von Hand

(auch symbolisch mit Mathcad möglich)

- Einsetzen in Funktional κ
- Suchen des Minimums für Funktional durch Variieren der freien Parameter

z. B. bei 2 Parametern im 3. Ansatz

$$\frac{d}{dk} \int_0^{100} \dots d\eta + \frac{d}{dn} \int_0^{100} \dots d\eta = 0$$

Schreibweise in Mathcad:

k : = ..., n : = Startwerte vorgeben

Vorgabe (nicht als Text schreiben !)

$\frac{d}{d.} \int . d. = 0$ Aufruf der Funktionen $\frac{d}{dx}$ und \int , Gleichheitszeichen „Strg +“

minfehl (k, n)=...

Ergebnisse mit Mathcad:

- Bei 1. Ansatz kommt mit Mathcad identische Lösung wie bei mathematischer Herleitung heraus.
- Bei allen anderen Ansätzen finden sich durch Probieren bessere Parameter (Test mittlerer absoluter Fehler) z. B. (vgl. Excel Programm (bzw. Diagramm))

2. Ansatz $k = 1,18$

3. Ansatz $k = 1,75, n = 1,17$

4. Ansatz $k_1 = 1,5, k_2 = 3$

5. Ansatz $k = 0,6$

- mittlere absolute Abweichung (in K) für die Werte in der Tabelle $t(\eta)$

Ansatz	1	2	3	4	5
Mathcad	5,883	3,80	4,42	4,21	2,41
empirisch	5,833	2,21	2,44	2,41	2,39

Problematik

Die Bestimmung des Minimums liefert mit Mathcad nur bei 1. und 2. Ansatz eindeutige Ergebnisse, d.h. Ergebnis ist unabhängig vom Startwert. Bei allen anderen Ansätzen ist Ergebnis vom Startwert abhängig. Insbesondere bei 2 freien Parametern ist der 2. Parameter immer sehr in der Nähe des Startwertes, auch so bei 5. Ansatz. Durch Probieren kann man schnell feststellen, dass mit anderen Parametern das Funktional κ kleinere Werte liefert. Allerdings ist es nicht so, dass die empirischen Parameter den kleinsten Wert für κ liefern, z. B. bei 3. Ansatz $\kappa(k = 1,75, n = 1,17) = 0,3617 \cdot A$ und von $\kappa(k = 1,414, n = 1) = 0,353553 \cdot A$, obwohl mit den empirischen Parametern bei 3. Ansatz gegenüber 1. Ansatz eine viel bessere Annäherung an den exakten Verlauf erreicht wird.

Es ist nicht so, dass die beste Ansatzfunktion (hier 5. Ansatz) den kleinsten Wert für κ liefert (z. B. liefert im vorliegenden Fall Ansatz 1 kleinere κ -Werte als 5. Ansatz)

($\kappa_5 = 0,389 A, \kappa_1 = 0,3535 A$).

Das Problem liegt auch in der Zielfunktion. Was ist das Kriterium für das Minimum (Minimum der mittleren absoluten Abweichung (hier verwendet zum Vergleich), Minimum der mittleren relativen absoluten Abweichung, Minimum der Standardabweichung,).

Lösung Aufgabe 3.1:

Gegeben: Rohr $d_a = 0,1 \text{ m}$, $t_w = 30 \text{ °C}$
 Umgebung $t_U = 10 \text{ °C}$
 Wind $w_1 = 0,1 \text{ m/s}$, $w_2 = 0,2 \text{ m/s}$, $w_3 = 0,5 \text{ m/s}$

Gesucht: Wärmeübergangskoeffizient und dominierende Konvektionsart

Es wird die Überlagerung von freier und erzwungener Konvektion am Beispiel eines querangeströmten Rohres betrachtet. Zuerst werden beide Konvektionsarten getrennt berechnet.

Freie Konvektion am waagerechten Rohr

Berechnung nach Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.38

Charakteristische Abmessung $\ell = d_a$

Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = 0,5 (t_w + t_U)$

$$t_B = 0,5 (10 + 30) \text{ °C} = 20 \text{ °C}$$

Stoffwerte für Luft (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.45)

$$\beta = 3,421 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}, \quad \lambda = 0,02569 \text{ W/(m K)},$$

$$\nu = 15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr} = 0,7148$$

Rayleigh-Zahl

$$\text{Ra} = \text{Gr Pr} = \frac{\beta g (t_w - t_U) d_a^3 \text{Pr}}{\nu^2} = \frac{3,421 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot (30 - 10) \cdot 0,1^3}{(15,35 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,7148 = 2,0362 \cdot 10^6$$

Nußelt-Gleichung

$$\text{Nu} = (0,11 \text{Ra}^{1/3} + \text{Ra}^{0,1}) K_T = 0,11 \cdot (2,0362 \cdot 10^6)^{1/3} + (2,0362 \cdot 10^6)^{0,1} = 18,217$$

$K_T = 1$, da Gas.

Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvektion

$$\alpha_f = \text{Nu} \frac{\lambda}{d_a} = 18,217 \frac{0,02569 \text{ W}}{0,1 \text{ m}^2 \text{ K}} = 4,68 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Erzwungene Konvektion bei Querströmung um Rohr

Berechnung nach Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.40 oder 41

Berechnung nach Fall d) Querangeströmter Zylinder

Bezugstemperatur $t_B = t_U = 10 \text{ °C}$,

charakteristische Abmessung $\ell = d_a$

Stoffwerte für Luft (Umdruck Technische Thermodynamik /Teil Wärmeübertragung, S.45)

$$\lambda = 0,02494 \text{ W/(m K)}, \nu = 14,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr} = 0,7163$$

Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_1 = \frac{w_1 d_a}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{14,42 \cdot 10^{-6}} = 693,5$$

Nußelt-Gleichung

$$\text{Nu}_1 = 0,52 \text{ Re}_1^{0,5} \text{ Pr}^{0,37} = 12,10$$

Wärmeübergangskoeffizient bei erzwungener Konvektion

$$\alpha_{e,1} = \text{Nu}_1 \frac{\lambda}{d_a} = 12,10 \frac{0,02494}{0,1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} = 3,018 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Für die anderen Geschwindigkeiten wird mit der entsprechenden Nußelt-Gleichung bei $\text{Re} > 1000$

$$\text{Nu} = 0,26 \text{ Re}^{0,6} \text{ Pr}^{0,37}$$

$$w_2 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{Re}_2 = 1387, \text{Nu}_2 = 17,64, \alpha_{e,2} = 4,40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

$$w_3 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{Re}_3 = 3467, \text{Nu}_3 = 30,57, \alpha_{e,3} = 7,625 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Berechnung nach Fall e) Umströmung beliebig geformter Einzelkörper

Bezugstemperatur $t_B = t_U$,

charakteristische Abmessung

$$\ell = \frac{A}{U} = \frac{\pi d_a L}{2L} = \frac{\pi d_a}{2} = 1,57 \text{ m}$$

Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_1 = \frac{w_1 \ell}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,157}{14,42 \cdot 10^{-6}} = 1089,3$$

Nußelt-Gleichung (laminare Strömung)

$$\text{Nu}_\ell = 0,664 \text{ Re}_1^{0,5} \text{ Pr}^{1/3} = 19,608$$

Nußelt-Gleichung (turbulente Strömung)

$$\text{Nu}_t = \frac{0,037 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}}{1 + 2,443 \text{Re}^{-0,1} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} = 9,404$$

Überlagerung von laminarer und turbulenter Strömung

$$\text{Nu} = (0,3 + (\text{Nu}_l^2 + \text{Nu}_t^2)^{1/2}) \text{K}_T = 20,604, \quad \text{K}_T = 1, \text{ da Gas.}$$

Wärmeübergangskoeffizient bei erzwungener Strömung

$$\alpha_{e,1} = \text{Nu} \frac{\lambda}{\ell} = 3,273 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Der relative Fehler gegenüber der obigen Rechnung beträgt + 8,4 %. Diese Abweichung liegt innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Nußelt-Gleichungen. Es wird mit den zuerst ermittelten Werten weiter gerechnet.

Überlagerung

Für die Überlagerung von freier und erzwungener Konvektion bei gleicher Strömungsrichtung der beiden Konvektionsarten gilt für querangeströmte Zylinder

$$\alpha = (\alpha_f^4 + \alpha_e^4)^{1/4}.$$

Die Annahme von gleicher Strömungsrichtung ist näherungsweise möglich (freie Strömung geht senkrecht nach oben, erzwungene Strömung waagrecht).

Durch Überlagerung kommt eine schräge Aufwärtsumströmung des Rohres zustande.

$$\alpha_1 = (4,68^4 + 3,018^4)^{1/4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 4,87 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}.$$

$$\alpha_2 = (4,68^4 + 4,40^4)^{1/4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 5,41 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

$$\alpha_3 = (4,68^4 + 7,625^4)^{1/4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 7,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Im 1. Fall ist die freie Konvektion dominierend, im 3. Fall die erzwungene Konvektion. Der Einfluss der anderen Konvektionsart ist < 5 %.

Im 2. Fall sind die beiden Konvektionsarten von gleichem Einfluss. Durch Überlagerung kommt eine Erhöhung des Wärmeübergangskoeffizienten im Vergleich zur Rechnung für eine Konvektionsart um etwa 20% zustande. Da im TGA-Bereich bei Raumströmungen mit Luftgeschwindigkeiten von etwa 10 bis 20 cm/s gerechnet wird, liegt für den Wärmeübergang an Raumflächen meist ein Übergangsbereich von freier und erzwungener Konvektion vor.

Lösung Aufgabe 3.2:

Gegeben:	Kondensator	
	senkrechte Rohre,	$d_a = 18 \text{ mm}, d_i = 16 \text{ mm}, \lambda_w = 50 \text{ W/(m K)}$
	Wassermassestrom	$\dot{m}_2 = 0,04 \text{ kg/s}, t'_2 = 60 \text{ °C}, t''_2 = 100 \text{ °C}$
	Sattdampf	$t_s = 110 \text{ °C}, \Delta h_v = 2230,5 \text{ kJ/kg}$
	Schmutzschicht	$\delta_s = 0,1 \text{ mm}, \lambda_s = 1 \text{ W/(m K)}$

Gesucht: a) Länge des senkrechten Rohrbündels L
b) Länge des waagerechten Rohrbündels

a) Die Energiebilanz für das Kühlmedium liefert die Leistung des Kondensators.

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_{p,2} (t''_2 - t'_2) = 0,04 \frac{\text{kg}}{\text{s}} 4197 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} (100 - 60) \text{ K} = 6715 \text{ W}$$

$$c_{p,2} (t_{2,m} = 80 \text{ °C}) = 4,197 \text{ kJ/(kg K)} \quad \text{Umdruck Technische Thermodynamik/} \\ \text{Teil Wärmeübertragung, S.46}$$

Aus der Energiebilanz für das Heizmedium wird der zu kondensierende Sattdampfmassestrom \dot{m}_1 berechnet.

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \Delta h_v \rightarrow \dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}}{\Delta h_v} = \frac{6715 \text{ W}}{2,2305 \cdot 10^6 \text{ J/kg}} = 0,00301 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Die gesuchte Länge des Rohrbündels kann aus der Gleichung für die Wärmeübertragung ermittelt werden.

$$\dot{Q} = k A \Delta t_m = \frac{\Delta t_m}{R}$$

Die mittlere Temperaturdifferenz für einen Kondensator berechnet sich zu

$$\Delta t_m = \frac{t''_2 - t'_2}{\ln \frac{t_s - t'_2}{t_s - t''_2}} = \frac{40 \text{ K}}{\ln \frac{50}{10}} = 24,85 \text{ K}$$

Wärmedurchgangswiderstand

$$R = \frac{1}{\pi L} \left[\frac{1}{\alpha_i d_i^*} + \frac{1}{2 \lambda_s} \ln \frac{d_i}{d_i^*} + \frac{1}{2 \lambda_w} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{1}{\alpha_a d_a} \right]$$

$$d_i^* = d_i - 2 \delta_s = 15,8 \text{ mm} \quad \text{freier Rohrrinnendurchmesser für Kühlwasser}$$

Zur Ermittlung der Rohrlänge L müssen die Wärmeübergangskoeffizienten α_i und α_a berechnet werden.

innerer Wärmeübergangskoeffizient α_i

Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_B = 0,5 (t'_2 + t''_2) = 80 \text{ °C}$

Stoffwerte Wasser (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.46)

$$\lambda = 0,667 \text{ W/(m K)}, \nu = 0,365 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \text{Pr} = 2,234, \\ \rho = 971,6 \text{ kg/m}^3, \eta = 355 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$$

Die Geschwindigkeit des Wassers in den Rohren ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung.

$$\dot{m}_2 = \rho w \frac{\pi}{4} d_i^{*2}$$

$$w = \frac{4 \dot{m}_2}{\rho \pi d_i^{*2}} = \frac{4 \cdot 0,04 \text{ kg/s}}{971,6 \text{ kg/m}^3 \pi \cdot 0,0158^2 \text{ m}^2} = 0,210 \text{ m/s}$$

Re-Zahl

$$\text{Re} = \frac{w d_i^*}{\nu} = \frac{0,210 \text{ m/s} \cdot 0,0158 \text{ m}}{0,365 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 9089 \quad \text{turbulent}$$

Nußelt-Gleichung für erzwungene turbulente Strömung im Rohr

$$\text{Nu} = 0,0235 (\text{Re}^{0,8} - 230)(1 + (d/L)^{2/3})(1,8 \text{Pr}^{0,3} - 0,8) \text{K}_T$$

1. Näherung $d/L = 0, \text{K}_T = 1$

$$\text{Nu} = 0,0235 (9089^{0,8} - 230)(1,8 \cdot 2,234^{0,3} - 0,8) = 43,38$$

Wärmeübergangskoeffizient auf der Innenseite des Rohres

$$\alpha_i = \text{Nu} \frac{\lambda}{d_i^*} = 43,38 \frac{0,667 \text{ W}}{0,0158 \text{ m}^2 \text{ K}} = 1831,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

äußerer Wärmeübergangskoeffizient α_a

Die Stoffwerte für Wasser werden näherungsweise bei der Kondensationstemperatur $t_s = 110 \text{ °C}$ gebildet (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.46)

$$\nu = 0,268 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,681 \text{ W/(m K)}, \quad \text{Pr} = 1,583 \\ \eta = 254,9 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, \quad \rho = 950,7 \text{ kg/m}^3$$

Re-Zahl des Kondensatfilms am Ende des senkrechten Rohres

$$\text{Re} = \frac{\dot{m}_1}{\eta \pi d_a} = \frac{0,00301 \text{ kg/s}}{254,9 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)} \pi \cdot 0,018 \text{ m}} = 208,8$$

Wegen $Re < Re_{kr} = 800 Pr^{-6/7} = 540$ liegt der Bereich der laminaren Filmströmung vor. Da $Re > 5,67$ ist, sollte die Verbesserung durch die Wellen auf dem Film berücksichtigt werden. Weiterhin ist die Gl. für den mittleren Wärmeübergang zu verwenden.

$$Nu^* = 0,80 Re^{-1/4} = 0,2104$$

Aus der Definition für die Nußelt-Zahl Nu^* ergibt sich der mittlere Wärmeübergangskoeffizient bei der Filmkondensation auf dem senkrechten Rohr

$$\alpha_a = Nu^* \lambda \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} = 0,2104 \cdot 0,681 \frac{W}{m K} \left(\frac{9,81 m/s^2}{(0,268 \cdot 10^{-6})^2 m^4/s^2} \right)^{1/3} = 7381 \frac{W}{m^2 K}$$

Damit berechnet sich der Wärmedurchgangswiderstand zu

$$R = \frac{1}{\pi L} \left[\frac{1}{1831,5 \cdot 0,0158} + \frac{\ln 16/15,8}{2 \cdot 1} + \frac{\ln 18/16}{2 \cdot 50} + \frac{1}{7381 \cdot 0,018} \right] \frac{K m}{W} = 0,01577 \cdot \frac{1}{L} \frac{K m}{W}$$

und die Rohrlänge aus der Gleichung für die Wärmeübertragung im Kondensator

$$L = \frac{\dot{Q} \cdot R \cdot L}{\Delta t_m} = \frac{6715 W \cdot 0,01577 K m/W}{24,85 K} = 4,26 m$$

Es ist eine Nachrechnung der Wärmeübergangskoeffizienten erforderlich, da bei der ersten Berechnung vereinfachende Annahmen gemacht wurden. Zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte müssen die Wandtemperaturen bestimmt werden:

innere Wandtemperatur

$$t_{w,i} = t_i + \dot{Q} R_{\alpha_i} = 80 \text{ °C} + 6715 W \cdot \frac{1}{\pi \cdot 4,26 m \cdot 1831,5 W/(m^2 K) \cdot 0,0158 m} = 97,3 \text{ °C}$$

äußere Wandtemperatur

$$t_{w,a} = t_s - \dot{Q} R_{\alpha_a} = 110 \text{ °C} - 6715 W \cdot \frac{1}{\pi \cdot 4,26 m \cdot 7381 W/(m^2 K) \cdot 0,018 m} = 106,2 \text{ °C}$$

Die Korrektur auf der Kondensatseite kann entfallen, da die mittlere Filmtemperatur mit $t_{f,m} = 0,5 (110 \text{ °C} + 106,2 \text{ °C}) = 108,1 \text{ °C}$ nur wenig von der Siedetemperatur abweicht, die in der 1. Näherung als Bezugstemperatur für die Stoffwerte benutzt wurde.

Mit den beiden Korrekturen für den inneren Wärmeübergang

$$K_T = \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} = \left(\frac{355 \cdot 10^{-6}}{291 \cdot 10^{-6}} \right)^{0,14} = 1,028$$

$$K_L = 1 + \left(d_i^* / L \right)^{2/3} = 1 + \left(\frac{0,0158}{4,26} \right)^{2/3} = 1,024$$

vergrößert sich der innere Wärmeübergangskoeffizient um 5,23% auf

$$\alpha_i = \alpha_{i,alt} \cdot K_T K_L = 1831,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,028 \cdot 1,024 = 1928 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Damit wird der Wärmedurchgangswiderstand $R = 0,0152 \text{ 1/L Km/W}$ und die neue Rohrlänge $L = 4,11 \text{ m}$

b) Es wird ein waagrecht liegendes Rohrbündel mit $n = 20$ Rohrreihen übereinander eingesetzt. Für den äußeren Wärmeübergangskoeffizienten werden die Gleichungen für die laminare Filmkondensation auf einem waagerechten Rohr verwendet.

$$\text{Nu}^* = 0,726 F^{1/4}$$

$$F = \frac{\Delta h_V \rho v^{5/3}}{\lambda (t_s - t_w) d_a g^{1/3}}$$

$$F = \frac{2230500 \text{ J/kg } 950,7 \text{ kg/m}^3 (0,268 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})^{5/3}}{0,681 \text{ W/(m K)} (110 - 106,2) \text{ K } 0,018 \text{ m } (9,81 \text{ m/s})^{1/3}} = 0,237$$

Es wird in guter Näherung von den Stoffwerten bei Siedetemperatur ausgegangen. Für die äußere Rohrwandtemperatur t_w wird in erster Näherung der Wert aus Teil a) verwendet. Damit erhält man

$$\text{Nu}^* = 0,726 \cdot 0,237^{1/4} = 0,5065$$

und den äußeren Wärmeübergangskoeffizienten bei der Kondensation auf einem waagerechten Rohr

$$\alpha_{a,1} = \text{Nu}^* \lambda \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} = 0,5065 \cdot 0,681 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{(0,268 \cdot 10^{-6})^2 \text{ m}^4/\text{s}^2} \right)^{1/3} = 17763 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Bei der Kondensation auf einem Rohrbündel wird der Wärmeübergangskoeffizient infolge von herabrieselndem Kondensat kleiner.

$$\alpha_a = \alpha_{a,1} \frac{1}{n^{1/6}} = \frac{17763}{20^{1/6}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 10781 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Damit ergibt sich für den Wärmedurchgangswiderstand (andere Werte wie im Teil a))

$$R = \frac{1}{\pi L} \left[\frac{1}{1928 \cdot 0,0158} + \frac{\ln 18/16}{2 \cdot 50} + \frac{\ln 16/15,8}{2 \cdot 1} + \frac{1}{10781 \cdot 0,018} \right] \frac{\text{K m}}{\text{W}} = 0,0144 \frac{1}{L} \frac{\text{K m}}{\text{W}}$$

und die Rohrlänge

$$L = \frac{6715 \text{ W} \cdot 0,0144 \text{ Km/W}}{24,85 \text{ K}} = 3,91 \text{ m}.$$

Eine Nachrechnung muss nicht erfolgen, da sich die Länge gegenüber a) kaum geändert hat und damit der innere Wärmeübergangskoeffizient nicht korrigiert werden muss. Beim waagerechten Rohrbündel wird keine nennenswerte Einsparung an Rohrlänge erreicht, da der Vorteil des höheren Wärmeübergangskoeffizienten beim waagerechten Einzelrohr infolge der Korrektur für das Rohrbündel zum größten Teil wieder zunichte gemacht wird. Außerdem stellt $R_{\alpha,a}$ nur einen kleinen Anteil am Gesamtwiderstand dar und seine Verringerung wirkt sich entsprechend nur wenig auf R_{ges} aus. Zur Verkleinerung der Heizfläche muss d_i verkleinert und die Geschwindigkeit in den Rohren vergrößert werden, sowie stets für saubere Rohre gesorgt werden.

Lösung Aufgabe 3.3:

Gegeben: senkrecht Rohr $d_i = 0,011 \text{ m}$
Benzoldampf $w_{d,E} = 8 \text{ m/s}$, gesättigt
Kondensation im Rohr $t_S - t_W = 5 \text{ K}$
Stoffwerte für Benzol
 $\rho_f = 823 \text{ kg/m}^3$, $\rho_d = 2,74 \text{ kg/m}^3$, $\eta_f = 3,21 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m s)}$
 $\eta_d = 9,26 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$, $\lambda_f = 0,131 \text{ W/(m K)}$, $Pr_f = 4,61$
 $\Delta h_V = 397,7 \text{ kJ/kg}$

Gesucht: Rohrlänge L bei vollständiger Kondensation

a) Rechnung mit Mittelwerten

Es liegt der Auslegungsfall vor (zu kondensierender Massestrom gegeben, Rohrlänge gesucht). Da der vorliegende Bereich (laminare oder turbulente Strömung des Films, Wirkung der Dampfschubspannung auf den Film) nicht bekannt ist, muss die Re-Zahl des Films ermittelt werden und die Rechnung für ruhenden Dampf und strömenden Dampf (ohne Schwerkrafteinfluss) durchgeführt werden.

1. Rechnung für ruhenden Dampf
Kondensatmassenstrom am unteren Rohrende = Eintrittsmassenstrom

$$\dot{m} = \rho_d w_{d,E} \frac{\pi}{4} d_i^2 = 2,083 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$$

Re-Zahl für Film

$$Re = \frac{\dot{m}}{\eta_f \pi d_i} = 187,8 < Re_{kr} = \frac{800}{Pr_f^{6/7}} = 215,9$$

mittlerer Wärmeübergangskoeffizient (Auslegungsfall, laminar)

$$Nu^* = \frac{0,8}{Re^{1/4}} = 0,2161$$

$$\alpha_1 = Nu^* \lambda_f \left(\frac{g \rho_f^2}{\eta_f^2} \right)^{1/3} = 1135 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

$$v_f = \eta_f / \rho_f$$

2. Rechnung bei Vernachlässigung der Schwerkraft

Näherung für mittleren Dampfmasseanteil bei vollständiger Kondensation
($x_E = 1$, $x_A = 0$)

$$x_m = \left[\frac{1}{3} (x_E^2 + x_A + x_A^2) \right]^{1/2} = 0,577$$

Re-Zahl für Film (örtliche Betrachtung, da örtlicher Wert bei x_m gleich dem Mittelwert über den gesamten Bereich gesetzt wird)

$$Re = \frac{\dot{m} (1 - x_m)}{\eta_f \pi d_i} = 79,43 > Re_{kr} = \frac{185}{Pr^{0,8}} = 54,5$$

Nu-Zahl (turbulente Filmströmung)

$$Nu_x^+ = 0,083 \frac{Pr^{0,3}}{Re^{1+Pr}} = 0,1166$$

Um den Wärmeübergangskoeffizienten aus der Nu-Zahl Nu^+ berechnen zu können, muss die Schubspannung an der Phasengrenze ermittelt werden. Für die Zweiphasenströmung kann dafür das Lockhart-Martinelli-Verfahren verwendet werden. Reibungsbeiwert für die Dampfströmung (nach Blasius) (Dampf allein im Rohr)

$$Re_d = \frac{x_m w_{d,E} d_i \rho_d}{\eta_d} = 15024 \quad \text{turbulent}$$

$$\lambda_{R,d} = \frac{0,3164}{Re_d^{0,25}} = 0,02858$$

Reibungsbeiwert für die Flüssigkeitsströmung (Flüssigkeit allein im Rohr)

$$Re_f = \frac{(1 - x_m) \dot{m} d_i}{\eta_f \frac{\pi}{4} d_i^2} = 317,5 \quad \text{la min ar,} \quad \lambda_{R,f} = \frac{64}{Re_f} = 0,202$$

Reibungsdruckgradient für die Dampfströmung

$$\left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,d} = \lambda_{R,d} \frac{\rho_d}{2} \frac{(x_m w_{d,E})^2}{d_i} = 75,92 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Reibungsdruckgradient für die Flüssigkeitsströmung

$$\left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,f} = \lambda_{R,f} \frac{\rho_f}{2 d_i} \left(\frac{(1 - x_m) \dot{m}}{\frac{\pi}{4} d_i^2 \rho_f} \right)^2 = 0,956 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Lockhart-Martinelli-Parameter

$$X_{LM} = \left[\frac{(dp/dl)_{R,f}}{(dp/dl)_{R,d}} \right]^{0,5} = 0,112$$

Nach dem Lockhart-Martinelli-Verfahren ist von der Dampfströmung auszugehen, da $X_{LM} < 1$ ist.

$$\lambda_R = \lambda_{R,d} \phi_g^2, \quad \phi_g^2 = \left(1 + X_{LM}^{2/n} \right)^n = 2,413 \quad \text{mit } n = 3,5, \text{ da } Re_d > 10^3 \text{ und } Re_f < 10^3$$

$$(dp/dl)_{R,ZP} = \phi_g^2 (dp/dl)_d = 183,2 \text{ Pa/m},$$

Schubspannung an der Phasengrenze

$$\tau_P = \frac{d_i}{4} \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,ZP} = 0,504 \text{ kg/ms}^2$$

oder mit Rohrreibungsbeiwert für eine Zweiphasenströmung

$$\lambda_R = \lambda_{R,d} \left(1 + X_{LM}^{2/3,5} \right)^{3,5} = 0,06901$$

ergibt sich dieselbe Schubspannung

$$\tau_P = \lambda_R \frac{\rho_d w_{d,E}^2 X_m^2}{8} = 0,504 \text{ kg/ms}^2$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_2 = Nu_x^+ \frac{\lambda_f \rho_f}{\eta_f} \left(\frac{\tau_P}{\rho_f} \right)^{0,5} = 969,4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

3. Überlagerung der beiden Bereiche

$$\alpha = \left(\alpha_1^{2,5} + \alpha_2^{2,5} \right)^{0,4} = 1395 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Benötigte Rohrlänge (aus Energiebilanz)

$$L = \frac{\dot{m} \Delta h_V}{\alpha \pi d_i (t_S - t_W)} = 3,437 \text{ m}$$

Rechnung mit Überlagerung von laminarer und turbulenter Strömung bei strömendem Dampf

laminare Filmströmung

$$\text{Nu}_{x,\text{lam}}^+ = (2 \text{Re})^{-0,5} = 0,07934$$

Überlagerung laminare und turbulente Filmströmung

$$\text{Nu}_x^+ = \left(\text{Nu}_{x,\text{lam}}^{+4} + \text{Nu}_{x,\text{turb}}^{+4} \right)^{1/4} = 0,1224$$

$$\alpha_2 = 1017,6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Überlagerung der beiden Bereiche

$$\alpha = \left(\alpha_1^{2,5} + \alpha_2^{2,5} \right)^{0,4} = 1423 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\text{Rohrlänge } L = 3,368 \text{ m}$$

Durch die genauere Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten für die Filmströmung (Re-Zahl für Filmströmung liegt im Übergangsbereich von laminarer zur turbulenter Filmströmung) verringert sich die benötigte Rohrlänge um 2%.

b) Bei einer genaueren Rechnung muss wegen der großen Änderung der Dampfschwindigkeit (von 8 m/s am Eintritt bis 0 am Austritt) abschnittsweise gerechnet werden.

Eine Einteilung in 10 Abschnitte ($N = 10$) liefert für die mittleren Dampfmasseanteile in den einzelnen Abschnitten

$$x_i = 0,95, 0,85, \dots, 0,05$$

- Berechnung für ruhenden Dampf (hier sind Gleichungen für den örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten zu verwenden, dieser örtliche Wert wird als mittlerer Wert im Abschnitt angesetzt)

$$\text{Re}_x = \frac{\dot{m} (1 - x_i)}{\eta_f \pi d_i}$$

$$\text{Nu}_x^* = \frac{0,64}{\text{Re}_x^{0,25}} \text{ für } \text{Re}_x > 5,67$$

$$\alpha_{1,x} = \text{Nu}_x^* \lambda_f \left(\frac{g \rho_f^2}{\eta_f^2} \right)^{1/3}$$

- Vernachlässigung der Schwerkraft (selbe Gln. wie bei a) , aber laminaren oder turbulenten Bereich für Filmströmung je nach Re-Zahl anwenden)

$$\text{Nu}_{x,\text{lam}}^+ = (2 \text{Re}_x)^{-0,5}, \quad \text{Nu}_{x,\text{turb}}^+ = \frac{0,083 \text{Pr}^{0,3}}{\text{Re}_x \frac{0,152}{1 + \text{Pr}}}$$

$$\text{Nu}_x^+ = \left(\text{Nu}_{x,\text{lam}}^{+4} + \text{Nu}_{x,\text{turb}}^{+4} \right)^{1/4} \rightarrow \alpha_{2,x} = \text{Nu}_x^+ \frac{\lambda_f \rho_f}{\eta_f} \left(\frac{\tau_{P,x}}{\rho_f} \right)^{0,5}$$

Auch die Schubspannung an der Phasengrenze $\tau_{P,x}$ ist für jeden Abschnitt gesondert zu berechnen.

- Überlagerung der beiden Bereiche (schwerkraftdominiert und schubspannungsdominiert)

$$\alpha_x = \left(\alpha_{1,x}^{2,5} + \alpha_{2,x}^{2,5} \right)^{0,4}$$

Die Teillängen in den Abschnitten berechnen sich aus der Energiebilanz zu

$$\Delta L_i = \frac{\dot{m} \Delta h_v}{N \alpha_x \pi d_i \Delta t}$$

Es ist zu beachten, dass keine Mittelwertbildung mit den α_x -Werten (arithmetischer Mittelwert von allen Abschnitten) vorgenommen werden darf, da ein flächengewichtetes mittleres α berechnet werden muss. Es gilt

$$\alpha_m = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) d\ell$$

Für die Gesamtlänge gilt

$$L = \sum \Delta L_i = 3,568$$

Nach dieser Rechnung hat sich die benötigte Rohrlänge wieder um ca. 6% gegenüber der letzten Berechnung vergrößert.

Der Unterschied zur ersten Rechnung wird größer, wenn die Schubspannung einen größeren Einfluss hat.

Diskussion:

Da in der Praxis die Vorgabe von $t_S - t_W$ nicht möglich ist, ist eine iterative Berechnung mit dem Wärmedurchgang erforderlich.

Als Startwert wird α_{Kond} angenommen oder ∞ gesetzt.

Iteration: Wärmedurchgang berechnen, liefert k
 Rohrlänge L berechnen
 α_{Kond} berechnen (Nachrechnungsfall oder Auslegungsfall, im vorliegenden
 Beispiel ist α_{Kond} unabhängig von L)
 Korrektur von k und L

Die Gln. für die Kondensation sind für die Randbedingung $t_W = \text{const}$ aufgestellt (stets abschnittsweise Berechnung, wenn $t_W - t_S \neq \text{const}$).

Tabelle für abschnittsweise Rechnung

x_i	z	0,95	0,85	0,75	0,65	0,55	0,45	0,35	0,25	0,15	0,05
$\alpha_{1,x}$	$\text{kW/m}^2 \text{K}$	1,92	1,46	1,28	1,18	1,11	1,05	1,01	0,976	0,946	0,92
$\alpha_{2,x}$	$\text{kW/m}^2 \text{K}$	2,38	1,51	1,26	1,11	0,985	0,868	0,748	0,620	0,476	0,290
α_x	$\text{kW/m}^2 \text{K}$	2,86	1,96	1,68	1,51	1,39	1,28	1,18	1,09	1,01	0,94
ΔL	m	0,168	0,245	0,286	0,317	0,346	0,375	0,406	0,439	0,475	0,51

Lösung Aufgabe 3.4:

Gegeben: Verdampfer mit einer Rohrschlange
 Rohr $d_a = 25 \text{ mm}$, $d_i = 21 \text{ mm}$, $\lambda_w = 45 \text{ W/(m K)}$, $L = 4 \text{ m}$
 Heißwasser in Rohrschlange $\dot{m}_1 = 0,2 \text{ kg/s}$, $t'_1 = 160 \text{ °C}$
 Wasser im Behälter $t_S = 120 \text{ °C}$, $\Delta h_V = 2202,9 \text{ kJ/kg}$

Gesucht: a) Dampfmassestrom \dot{m}_2
 b) Wärmeübergangskoeffizienten auf Rohraußenseite am Anfang und Ende des Rohres $\alpha_{a,A}$ und $\alpha_{a,E}$

a) Die Grundgleichungen für den Wärmeübertrager (Verdampfer) lauten

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p,1} (t'_1 - t''_1) \quad (1)$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \Delta h_V \quad (2)$$

$$\dot{Q} = k A \Delta t_m, \quad \Delta t_m = \frac{t'_1 - t''_1}{\ln \frac{t'_1 - t_S}{t''_1 - t_S}} \quad (3)$$

Da \dot{m}_2 und t''_1 unbekannt sind, wird folgende Umformung vorgenommen. Gleichsetzen von (1) und (3) liefert (Ausdruck $(t'_1 - t''_1)$ kürzt sich weg)

$$\ln \left(\frac{t'_1 - t_S}{t''_1 - t_S} \right) = \frac{k A}{\dot{C}_1} = N_1 \quad \text{mit} \quad \dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_{p,1}$$

bzw.

$$t''_1 = t_S + (t'_1 - t_S) \exp(-N_1)$$

Einsetzen in (1) und Gleichsetzen mit (2) liefert den gesuchten Dampfmassestrom

$$\dot{m}_2 = \frac{\dot{C}_1}{\Delta h_V} (t'_1 - t''_1) = \frac{\dot{C}_1}{\Delta h_V} (t'_1 - t_S)(1 - \exp(-N_1)).$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn die Betriebscharakteristik verwendet wird. Es gilt bei $R_1 = \dot{C}_1 / \dot{C}_2 = 0$ (es gilt $\dot{C}_2 = \infty$ wegen konstanter Temperatur bei der Verdampfung) nach Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.64 (Gleichung für Gleich- oder Gegenströmer verwendbar)

$$\phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t_S} = 1 - \exp(-N_1)$$

sowie $\dot{Q} = \Phi_1 \dot{C}_1 (t'_1 - t_S)$.

In (2) eingesetzt, erhält man nach Umstellung

$$\dot{m}_2 = \frac{\dot{C}_1}{\Delta h_V} (t'_1 - t_S) \Phi_1 = \frac{\dot{C}_1}{\Delta h_V} (t'_1 - t_S) (1 - \exp(-N_1))$$

Zur weiteren Lösung wird der Wärmedurchgangskoeffizient k bzw. der Wärmedurchgangswiderstand $R = 1/kA$ benötigt. Da die zur Ermittlung der Wärmeübergangskoeffizienten benötigten Wandtemperaturen von vornherein nicht bekannt sind, muss eine iterative Rechnung erfolgen.

innerer Wärmeübergangskoeffizient α_i

Annahme $t_B = t'_1 = 160^\circ\text{C}$

Stoffwerte (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.46)

$$\rho = 907,3 \text{ kg/m}^3, c_p = 4,339 \text{ kJ/(kg K)}, \lambda = 0,682 \text{ W/(m K)},$$

$$\eta = 169,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, \nu = 0,187 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \text{Pr} = 1,079$$

Geschwindigkeit (nach Kontinuitätsgleichung)

$$w = \frac{4 \dot{m}}{\rho \pi d_i^2} = \frac{4 \cdot 0,2 \text{ kg/s}}{907,3 \text{ kg/m}^3 \pi 0,021^2 \text{ m}^2} = 0,636 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Re-Zahl

$$\text{Re} = \frac{w d_i}{\nu} = \frac{0,636 \text{ m/s} \cdot 0,021 \text{ m}}{0,187 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 71470.$$

Es liegt eine erzwungene turbulente Strömung im Rohr vor.

Nußelt-Gleichung

$$\text{Nu} = 0,0235 (\text{Re}^{0,8} - 230) (1 + (d_i/L)^{2/3}) (1,8 \text{Pr}^{0,3} - 0,8) K_T$$

Annahme $K_T = 1$

$$\text{Nu} = 0,0235 (71470^{0,8} - 230) \left(1 + \left(\frac{0,021}{4} \right)^{2/3} \right) (1,8 \cdot 1,079^{0,3} - 0,8) = 193$$

innerer Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_i = \text{Nu} \frac{\lambda}{d_i} = 193,0 \frac{0,682 \text{ W}}{0,021 \text{ m}^2 \text{ K}} = 6268 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

äußerer Wärmeübergangskoeffizient α_a

1. Annahme: $\alpha_a \gg \alpha_i$ (sehr guter Wärmeübergangskoeffizient bei Verdampfung)

Damit wird der Wärmedurchgangswiderstand

$$R = \frac{1}{\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{\ln d_a / d_i}{2 \lambda_W} \right) = \frac{1}{\pi \cdot 4 \text{ m}} \left(\frac{1}{6268 \cdot 0,021} + \frac{\ln 25/21}{2 \cdot 45} \right) \frac{\text{m K}}{\text{W}} = 7,587 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

bzw. $k A = \frac{1}{R} = 1318 \frac{\text{W}}{\text{K}}$.

Wärmekapazitätsstrom des Heizmediums (Stoffwerte näherungsweise bei t'_1 berechnet)

$$\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_{p,1} = 0,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 4,339 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} = 867,8 \text{ W/K}$$

Übertragungszahl

$$N_1 = \frac{k A}{\dot{C}_1} = \frac{1318}{867,8} = 1,519$$

Betriebscharakteristik

$$\Phi_1 = 1 - \exp(-N_1) = 1 - \exp(-1,519) = 0,781$$

übertragener Wärmestrom

$$\dot{Q} = \Phi_1 \dot{C}_1 (t'_1 - t_s) = 0,781 \cdot 867,8 \frac{\text{W}}{\text{K}} (160 - 120) \text{ K} = 27,11 \text{ kW}$$

bzw. Wärmestromdichte auf Rohraußenfläche

$$\hat{q}_a = \frac{\dot{Q}}{A_a} = \frac{\dot{Q}}{\pi d_a L} = \frac{27,11 \text{ kW}}{\pi \cdot 0,025 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}} = 86,3 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Mit diesem ersten Näherungswert für \hat{q}_a kann nun der Wärmeübergangskoeffizient beim Blasen-sieden berechnet werden (es ist gleichgültig, ob mit dem 1. Teil der Formel nach Fritz und mit \hat{q}_a oder mit dem 2. Teil der Formel und $t_{W,a}$ gerechnet wird).

$$\alpha_{BS} = 489,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \left(\frac{\hat{q}_a}{\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}} \right)^{0,72} \left(\frac{p}{\text{MPa}} \right)^{0,24}$$

$$\alpha_{BS} = 489,8 \cdot 86,3^{0,72} \cdot 0,19854^{0,24} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 8230 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

$$p(t_S) = 0,19854 \text{ MPa} \quad \text{Dampf tafel (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Energielehre)}$$

äußere Wandtemperatur

$$t_{W,a} = t_S + \frac{\hat{q}_a}{\alpha_{BS}} = 120 \text{ °C} + \frac{86300}{8230} \text{ K} = 130,5 \text{ °C}.$$

Zusätzlich ist der Wärmeübergang infolge freier Konvektion auf der Rohraußenseite zu berechnen (mit 1. Näherung für $t_{W,a}$, wobei nur Blasensieden angenommen wurde).

Stoffwerte für Wasser bei $t_B = 0,5 (t_{W,a} + t_S) \approx 125 \text{ °C}$

$$\lambda = 0,6835 \text{ W/(mK)}, \quad \beta = 0,8855 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}, \quad \nu = 0,237 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr} = 1,3835$$

Rayleigh-Zahl

$$\begin{aligned} \text{Ra} = \text{Gr Pr} &= \frac{\beta g d_a^3 (t_{W,a} - t_S)}{\nu^2} \text{Pr} \\ &= \frac{0,8855 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 0,025^3 (130,5 - 120)}{(0,237 \cdot 10^{-6})^2} 1,3835 = 3,51 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Nußelt-Gleichung

$$\text{Nu} = (0,11 \text{ Ra}^{1/3} + \text{Ra}^{0,1}) \text{K}_T = 42,0$$

$$\text{K}_T = \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} = \left(\frac{222,4}{212,7} \right)^{0,14} = 1,006$$

Wärmeübergangskoeffizient für freie Konvektion

$$\alpha_{\text{Konv}} = \text{Nu} \frac{\lambda}{d_a} = 42 \frac{0,6835}{0,025} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 1147 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Der gesamte Wärmeübergangskoeffizient auf der Außenseite des Rohres ist

$$\alpha_a = (\alpha_{BS}^{2,5} + \alpha_{Konv}^{2,5})^{0,4} = (8230^{2,5} + 1147^{2,5})^{0,4} \frac{W}{m^2 K} = 8254 \frac{W}{m^2 K} .$$

Die freie Konvektion hat nur einen geringen Einfluss, da vollentwickeltes Blasensieden vorliegt. Nachdem ein Wert von α_a vorliegt, kann der Wärmeübergangskoeffizient für das Blasensieden α_{BS} korrigiert werden. Die Rechnung erfolgt analog der obigen Vorgehensweise.

$$R = \frac{1}{\pi \cdot 4 \text{ m}} \left(\frac{1}{6268 \cdot 0,021} + \frac{\ln 25/21}{2 \cdot 45} + \frac{1}{8254 \cdot 0,025} \right) \frac{Km}{W} = 1,144 \cdot 10^{-3} \frac{K}{W}$$

$$k A = 873,8 \frac{W}{K}; \quad N_1 = 1,007; \quad \Phi_1 = 0,635; \quad \hat{q}_a = 70,1 \frac{kW}{m^2}$$

$$\alpha_{BS} = 7088 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \approx \alpha_a \quad (\alpha_{Konv} \text{ vernachlässigt}) .$$

Da $\alpha_a \approx \alpha_i$ ist, war der 1. Startwert schlecht. Eine weitere Korrektur von α_{BS} soll erst nach der Korrektur von α_i vorgenommen werden.

Korrektur der Wärmedurchgangsberechnung

Mit dem wiederum korrigierten Wert $R = 1,208 \cdot 10^{-3} \text{ K}/\text{W}$ wird $N_1 = 0,954$ und die Austrittstemperatur des Heißwassers aus der Rohrschlange

$$t_1'' = 120 \text{ °C} + (160 - 120) \text{ K} \exp(-0,954) = 135,4 \text{ °C} .$$

Mit der neuen Bezugstemperatur für das Heißwasser

$$t_B = 0,5 (160 + 135,4) \text{ °C} = 147,7 \text{ °C} \approx 150 \text{ °C}$$

und den entsprechenden Stoffwerten aus dem Umdruck ergeben sich für den Wärmeübergang auf der Innenseite

$$w = 0,63 \text{ m/s}, \quad Re = 66800, \quad K_T \approx 0,98, \quad Nu = 178,5, \quad \alpha_i = 5815 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) .$$

Die Korrektur von α_a liefert die Werte

$$R = 1,255 \cdot 10^{-3} \text{ K}/\text{W}, \quad k A = 797 \text{ W}/\text{K}, \quad \dot{C}_1 = 862 \text{ W}/\text{K}, \quad N_1 = 0,924$$

$$\Phi_1 = 0,603, \quad \hat{q}_a = 66,21 \text{ kW}/\text{m}^2, \quad \alpha_{BS} = 6800 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

Mit den letzten Werten beträgt der Wärmedurchgangswiderstand

$$R = 1,274 \cdot 10^{-3} \text{ K/W} \quad \text{bzw.} \quad k A = 785 \text{ W/K}.$$

Da die Änderung gegenüber dem letzten Wert $< 2\%$ ist, wird die Iteration abgebrochen (sinnvoll, da Genauigkeit der Nu-Gleichungen nur etwa 20% beträgt).

Damit betragen die Austrittstemperatur des Heißwassers

$$t_1'' = 120^\circ\text{C} + (160 - 120) \text{ K} \exp\left(-\frac{785}{862}\right) = 136,1^\circ\text{C}$$

der verdampfende Massestrom

$$\dot{m}_2 = \frac{862}{2,2029 \cdot 10^6} (160 - 120) \left(1 - \exp\left(-\frac{785}{862}\right)\right) \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 9,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} = 33,7 \text{ kg/h}$$

und die Leistung des Dampferzeugers

$$\dot{Q} = \dot{C}_1 (t_1' - t_s) (1 - \exp(-N_1)) = 20,6 \text{ kW}.$$

b) Es wird ein Vergleich der Wärmeübergangskoeffizienten α_a zwischen Rohranfang und Rohrende vorgenommen. Der Wärmeübergangskoeffizient für das Blasensieden α_{BS} für den Rohranfang wird nach folgendem Schema iterativ bestimmt.

$$R = \frac{1}{\pi L} \left[\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{\ln d_a / d_i}{2 \lambda_w} + \frac{1}{\alpha_{BS} d_a} \right]$$

$$\hat{q}_a = \frac{t_1' - t_s}{\pi d_a L R}$$

$$\alpha_{BS} = 489,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \left(\frac{\hat{q}_a}{\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}} \right)^{0,72} \left(\frac{p}{\text{MPa}} \right)^{0,24}$$

Für das Rohrende gelten dieselben Gleichungen, aber für t_1' ist t_1'' einzusetzen.

Mit den Werten $t_1' = 160^\circ\text{C}$, $t_1'' = 136,1^\circ\text{C}$, und $\alpha_i = 5815 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ erhält man nach mehreren Iterationsschritten:

$$\text{für Rohranfang} \quad \alpha_{BS} = 10\,000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

$$\text{für Rohrende} \quad \alpha_{BS} = 4045 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}).$$

Näherungsweise ergibt sich für den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten (Rechnung analog zu a))

$$\begin{array}{ll} \text{für Rohranfang} & \alpha_{\text{Konv}} = 1160 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \\ \text{für Rohrende} & \alpha_{\text{Konv}} = 1050 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}). \end{array}$$

Die Werte für α_{Konv} unterscheiden sich wenig, da sich auch die äußere Wandtemperatur nur wenig verändert (etwa von $t_{\text{W,a}} = 131,3 \text{ °C}$ am Rohranfang auf $t_{\text{W,a}} = 128 \text{ °C}$ am Rohrende). In beiden Fällen bringt die Überlagerung von α_{BS} und α_{Konv} keine nennenswerte Verbesserung des Wärmeübergangskoeffizienten.

Aus dem Vergleich erkennt man die starke Änderung des Wärmeübergangskoeffizienten beim Blasensieden. Dies macht bei genaueren Rechnungen eine Einteilung der Rohrlänge in mehrere Abschnitte und ein schrittweises Berechnen erforderlich.

Zum Abschluss soll eine Kontrolle vorgenommen werden, ob die kritische Wärmestromdichte \hat{q}_{krit} beim Blasensieden erreicht wird:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\text{krit}} &= 0,145 \Delta h_V (\rho''^2 \sigma g (\rho' - \rho''))^{0,25} \\ &= 0,145 \cdot 2,2029 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}} (1,121^2 \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^6} 54,97 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (942,8 - 1,121) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})^{0,25} \\ \hat{q}_{\text{krit}} &= 1,60 \text{ MW}/\text{m}^2. \end{aligned}$$

Die kritische Wärmestromdichte liegt deutlich über den erreichten Wärmestromdichten. Bei Beheizung mit Heißwasser wird \hat{q}_{krit} nie erreicht (nur bei elektrischer o. ä. Beheizung).

Bei dem obigem Behälter besteht nur dann eine Minderleistung, wenn die Rohre nicht vollständig in die Flüssigkeit eintauchen.

Lösung Aufgabe 3.5:

Gegeben: Dampferzeugerrohre $d_i = 68 \text{ mm}$, $d_a = 76 \text{ mm}$, $\lambda_R = 45 \text{ W/(m K)}$
 Feuerraum $t_a = 1100 \text{ °C}$, $\alpha_a = 250 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
 Wasser $\hat{m} = 500 \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}$, $t_{F,E} = 200 \text{ °C}$,
 $t_S = 270 \text{ °C}$, $x_A = 0,2$, $\zeta_E = 3$, $\zeta_{E,F} = 5$

Gesucht: a) Rohrlänge, b) Druckverluste, c) Naturumlauf

a) Stoffwerte für Wasser bei Siedetemperatur $t_S = 270 \text{ °C}$

$$c_p' = 5,126 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \quad \rho' = 767,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \lambda' = 0,593 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\eta' = 97,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}, \quad \nu' = 0,127 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr}' = 0,842$$

$$\Delta h_V = 1,6046 \text{ MJ/kg}, \quad p_S(t_S) = 5,5051 \text{ MPa}, \quad \sigma = 0,02135 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(bei Iterationsrechnungen werden die Zahlenwerte für die Stoffwerte aus Libl F97 (Prof. Kretzschmar) verwendet)

Stoffwerte für Wasserdampf bei Siedetemperatur (aus VDI-Wärmeatlas)

$$\rho'' = 28,061 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \eta'' = 18,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

Bereich Flüssigkeitsströmung ohne Sieden

Wärmeübergangskoeffizient bei Flüssigkeitsströmung

$$w_F = \frac{\hat{m}}{\rho_F} = 0,651 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{Re}_F = \frac{w_F d_i}{\nu_F} = 348700, \quad \text{Re}_F = \frac{\hat{m} d_i}{\eta_F}$$

$$\text{Nu}_F = 0,0234 \left(\text{Re}_F^{0,8} - 230 \right) \left(1,8 \text{Pr}_F'^{0,3} - 0,8 \right) = 573,1$$

$$K_L = 1, \quad K_T = 1 \text{ gesetzt}$$

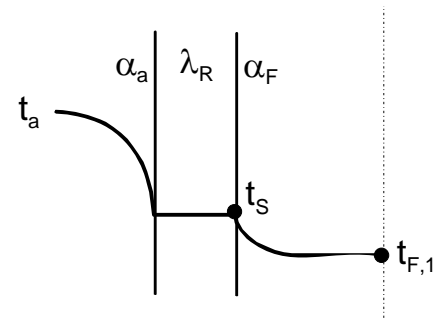
$$\alpha_F = \text{Nu}_F \frac{\lambda_F'}{d_i} = 4998 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Ermittlung der Fluidtemperatur $t_{F,1}$, bei der $t_{W,i} = t_S$ erreicht wird.

$$k_{i,F} = \left(\frac{1}{\alpha_F} + \frac{d_i}{2 \lambda_R} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_i}{d_a \alpha_a} \right)^{-1} = 258,86 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Aus $k_{i,F} (t_a - t_{F,1}) = \alpha_F (t_S - t_{F,1})$ wird

$$t_{F,1} = \frac{k_{i,F} t_a - \alpha_F t_S}{k_{i,F} - \alpha_F} = 224,665 \text{ °C}$$

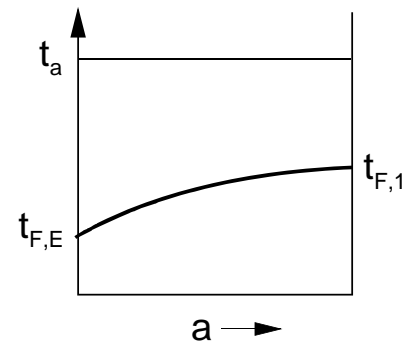


Rohrlänge im Bereich der Einphasenströmung
Aus der Energiebilanz ergibt sich mit

$$\Delta t_m = \frac{t_{F,1} - t_{F,E}}{\ln \frac{t_a - t_{F,E}}{t_a - t_{F,1}}} = 887,611 \text{ K}$$

die Rohrlänge

$$\Delta L_1 = \frac{c_{pF} (t_{F,1} - t_{F,E}) \hat{m} \pi \frac{d_i^2}{4}}{\pi d_i k_{i,F} \Delta t_m} = 4,677 \text{ m}$$



und die Wärmestromdichte

$$\hat{q}_i = k_{i,F} \Delta t_m = 229,8 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Bei Annahme eines linearen Verlaufes von $t_F(l)$ ergibt sich $\Delta t_m = t_a - 0,5 (t_{F,E} + t_{F,1}) = 887,667 \text{ K}$ (Linearer Verlauf ist sinnvoll, da $\hat{q} \approx \text{const}$ ist).

Bereich des unterkühlten Siedens

Der Mittelwert der Fluidtemperatur im Bereich des unterkühlten Siedens beträgt

$$t_{F,U} = 0,5 (t_S + t_{F,1}) = 247,332 \text{ °C}$$

Diese Annahme ist gut, da $\hat{q} \approx \text{const}$ ist. Wandtemperatur erhöht sich ungefähr linear.

Die Wandtemperatur (innen) wird für die iterative Rechnung angenommen (hier schon das Ergebnis angegeben)

$$t_{W,i} = t_S + 5,77 = 275,77 \text{ °C}$$

Wärmeübergangskoeffizient beim Blasensieden (Gl. von Fritz)

$$\alpha_{BS,U} = 77,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \left(\frac{t_{W,i} - t_S}{\text{K}} \right)^{2,57} \left(\frac{p_S}{\text{MPa}} \right)^{0,857} = 30340 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Wärmestromdichte auf Innenseite (Konvektion + Blasensieden) (nach innen)

$$\hat{q}_{i,U} = \left[(\alpha_{F,U} (t_{W,i} - t_{F,U}))^2 + (\alpha_{BS,U} (t_{W,i} - t_S))^2 \right]^{0,5} = 225,5 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Die Wärmestromdichte durch Konvektion beträgt 142 kW/m² und für Blasensieden 175 kW/m².

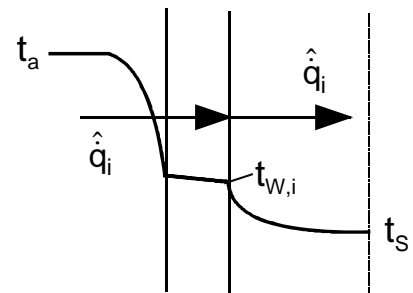
Wärmestromdichte auf Innenseite (von außen)

$$\hat{q}_{i,U} = \frac{t_a - t_{W,i}}{\frac{d_i}{2 \lambda_R} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_i}{d_a \alpha_a}} = 225,0 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Es liegt ein ausreichender Abgleich vor ($t_{W,i}$ richtig gewählt).

Rohrlänge für unterkühltes Sieden

$$\Delta L_2 = \frac{c_p' (t_S - t_{F,1}) \hat{m} \pi \frac{d_i^2}{4}}{\pi d_i \hat{q}_{i,U}} = 8,76 \text{ m}$$



Bereich des gesättigten Siedens

Es wird der örtliche Wärmeübergangskoeffizient für den Mittelwert des Dampfanteils $\dot{x} = 0,1$ berechnet,

$$\dot{x} = \frac{\hat{m}_d}{\hat{m}_d + \hat{m}_f}$$

Der konvektive Wärmeübergang für eine Zweiphasenströmung wird mit dem Lockhart/Martinelli-Parameter berechnet. Für die Flüssigkeitsströmung allein im Rohr ergibt sich der Wärmeübergangskoeffizient nach den bekannten Gleichungen.

$$w_{F,x} = \frac{\hat{m}(1 - \dot{x})}{\rho'} = 0,586 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{Re}_{F,x} = \frac{w_{F,x} d_i}{\nu'} = 313800$$

$$\text{Nu}_{F,x} = 0,0234 \left(\text{Re}_{F,x}^{0,8} - 230 \right) \left(1,8 \text{Pr}^{0,3} - 0,8 \right) = 526,4$$

$$\alpha_{F,x} = \frac{\text{Nu}_{F,x} \lambda'}{d_i} = 4591 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Lockhart-Martinelli-Parameter für turbulente Strömung

$$X_{tt} = \left(\frac{1 - \dot{x}}{\dot{x}} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho''}{\rho'} \right)^{0,5} \left(\frac{\eta'}{\eta''} \right)^{0,1} = 1,633$$

Wärmeübergangskoeffizient für eine Zweiphasenströmung (Näherungsgleichung)

$$\alpha_{ZP,x} = \alpha_{F,x} \left(1 + \frac{3}{X_{tt}} \right)^{0,7} = 9526 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Annahme der inneren Wandtemperatur für die iterative Berechnung

$$t_{W,i} = t_S + 6,165 \text{ K} = 276,165 \text{ }^\circ\text{C}$$

Wärmeübergangskoeffizient für Blasensieden (Gl. von Fritz)

$$\alpha_{BS,x} = 77,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \left(\frac{t_{W,i} - t_S}{\text{K}} \right)^{2,57} \left(\frac{p_S}{\text{MPa}} \right)^{0,857} = 35970 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Überlagerung von konvektivem Wärmeübergang und Blasensieden (Blasensieden dominiert)

$$\alpha_x = \left(\alpha_{ZP,x}^{2,5} + \alpha_{BS,x}^{2,5} \right)^{0,4} = 36480 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Wärmestromdichte auf Innenseite (von Innen berechnet)

$$\hat{q}_{i,x} = \alpha_x (t_{W,i} - t_S) = 224,92 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Wärmestromdichte auf Innenseite (von Außen berechnet)

$$\hat{q}_{i,x} = \frac{t_a - t_{W,i}}{\frac{d_i}{2 \lambda_R} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_i}{d_a \alpha_a}} = 224,91 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Es liegt eine ausreichende Genauigkeit für die Iteration vor.

Rohrlänge im Bereich des gesättigten Siedens

$$\Delta L_3 = \frac{\Delta h_V \dot{x}_A \hat{m} \frac{\pi d_i^2}{4}}{\pi d_i \hat{q}_{i,x}} = 12,128 \text{ m}$$

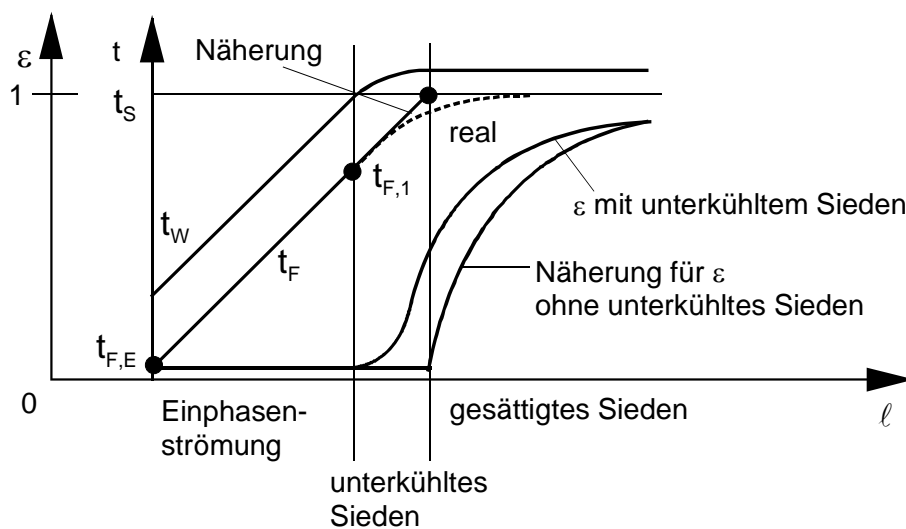
Gesamte Rohrlänge

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = 25,564 \text{ m}$$

Bemerkungen:

Da der Hauptwiderstand auf der Außenseite liegt, ergibt sich in allen 3 Bereichen ungefähr gleiches \hat{q} . Blasensieden dominiert gegenüber konvektivem Wärmeübergang. Für Naturumlauf ist der Dampfvolumenanteil wichtig. Bei zu groß gewählten ΔL (Aufschlag + 25%) kann evtl. schon Siedekrise erreicht werden (Problem: Durchströmung von parallelen Rohren).

Temperaturverlauf von Flüssigkeit und Wand



b) Die Druckverluste müssen für die 3 Abschnitte getrennt berechnet werden, wobei hier der Bereich des unterkühlten Siedens näherungsweise wie eine Einphasenströmung behandelt wird. Zuerst wird der Bereich des gesättigten Siedens betrachtet. Die verwendeten Berechnungsmethoden sind im Umdruck S.24-26 zu finden.

Dampfvolumenanteil nach Verfahren von Zuber/Findlay

Zur Berechnung des Druckverlustes infolge von Höhenunterschieden muss der Dampfvolumenanteil berechnet werden. Da der Dampf schneller strömt als die Flüssigkeit (Schlupf), kann nicht von der mittleren Dichte des homogenen Gemischs ausgegangen werden. Der Gasvolumenanteil in einem Volumenelement ε ist kleiner als der Anteil $\dot{\varepsilon}$ des Gasvolumenstromes am gesamten Volumenstrom.

$$C = 1 + 0,2 (1 - \dot{x}) \left(\frac{g d_i \rho'^2}{\hat{m}} \right)^{0,25} = 1,202 \quad \text{Profilparameter}$$

$$u_{BL} = 1,18 \left(\frac{\sigma g (\rho' - \rho'')}{\rho'^2} \right)^{0,25} = 0,15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Blasenaufstiegsgeschwindigkeit}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{C \left[1 + \frac{(1-\dot{x}) \rho''}{\dot{x} \rho'} \right] + \frac{u_{BL} \rho''}{\dot{x} \hat{m}}} = 0,595 \quad \text{Dampfvolumenanteil}$$

Die Ergebnisse gelten für $\dot{x} = \dot{x}_A / 2 = 0,1$. Der örtliche Wert bei $\dot{x} = 0,1$ wird als Mittelwert für den Bereich des gesättigten Siedens betrachtet.

Reibungsdruckverlust nach Verfahren von Lockhart/Martinelli

Re-Zahlen für Flüssigkeits- und Dampfströmung allein

$$\text{Re}_f = \frac{(1-\dot{x}) \hat{m} d_i}{\eta'} = 314200, \quad \text{Re}_g = \frac{\dot{x} \hat{m} d_i}{\eta''} = 186100$$

Rohrreibungsbeiwert (turbulente Strömung, Blasius)

$$\xi = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}}, \quad \xi_f = 0,013, \quad \xi_g = 0,015$$

Einphasenreibungsdruckgradient

$$\left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,f} = \frac{\xi_f (1-\dot{x})^2 \hat{m}^2}{2 d_i \rho'} = 25,917 \text{ Pa/m}$$

$$\left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,g} = \frac{\xi_g \dot{x}^2 \hat{m}^2}{2 d_i \rho''} = 9,979 \text{ Pa/m}$$

Lockhart-Martinelli-Parameter

$$X_{LM} = \left(\frac{(dp/dl)_{R,f}}{(dp/dl)_{R,g}} \right)^{0,5} = 1,612$$

Reibungsdruckgradient für Zweiphasenströmung (mit $n = 4$ und ϕ_f , $\phi_f^2 = 10,21$)

$$\left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,ZP} = \phi_f^2 \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,f} = \left(1 + \frac{1}{X_{LM}^{0,5}} \right)^4 \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,f} = 264,7 \text{ Pa/m}$$

Dichten

$$\rho_m = \varepsilon \rho'' + (1 - \varepsilon)\rho' = 327,768 \text{ kg/m}^3 \text{ mittlere Dichte (für } \Delta p_H)$$

$$\rho_{I,A} = \left[\frac{(1 - \dot{x}_A)^2}{(1 - \varepsilon_A)\rho'} + \frac{\dot{x}_A^2}{\varepsilon_A \rho''} \right]^{-1} = 202,535 \text{ kg/m}^3 \text{ Impulsdichte für } \Delta p_B \text{ am Austritt}$$

mit $\varepsilon_A = 0,718$ (für $\dot{x}_A = 0,2$)

mittlere Impulsdichte für $\dot{x} = 0,1$ (zur Berechnung von Δp_E)

$$\rho_I = 312,212 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Kontrolle } \frac{\dot{x}}{1 - \dot{x}} \frac{\rho'}{\rho''} = 3,04$$

Da dieser Ausdruck $> 0,3$ und < 1000 ist, ist die Verwendung der Impulsdichte bei der Berechnung von Δp_E richtig.

Einphasenströmung ($\dot{x} = 0$)

Nach den obigen Gleichungen ergibt sich für die Flüssigkeitsströmung mit $\dot{x} = 0$

$$Re_{F,0} = 349100, \quad \xi_{f,0} = 0,013, \quad \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,0} = 31,164 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Reibungsdruckverlust

$$\Delta p_R = (\Delta L_1 + \Delta L_2) \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,0} + \Delta L_3 \left(\frac{dp}{dl} \right)_{R,ZP} = 3629 \text{ Pa}$$

(unterkühlter Bereich wie Einphasenströmung gerechnet)

Druckänderung infolge von Höhenunterschieden

$$\Delta p_H = \rho' g (\Delta L_1 + \Delta L_2) + \rho_m g \Delta L_3 = 140200 \text{ Pa}$$

Beschleunigungsdruckverlust

$$\Delta p_B = \hat{m}^2 \left(\frac{1}{\rho_{I,A}} - \frac{1}{\rho'} \right) = 908,75 \text{ Pa}$$

Druckverlust infolge von Einzelwiderständen

$$\Delta p_E = \zeta_E \frac{\hat{m}^2}{2 \rho_I} = 1201 \text{ Pa}$$

gesamter Druckunterschied über Steigrohr

$$\Delta p_{\text{ges,Steig}} = \Delta p_R + \Delta p_H + \Delta p_B + \Delta p_E = 145900 \text{ Pa}$$

c) Druckänderung im Fallrohr

Es gelten die selben Gleichungen wie oben für eine Flüssigkeitsströmung.

$$\Delta p_{R,F} = \Delta L (dp/dl)_{R,0} = 796,7 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_H = \rho' g \Delta L = 192500 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_E = \zeta_E \frac{\hat{m}^2}{2 \rho'} = 814 \text{ Pa}, \quad \Delta p_B = 0 \quad (\text{da } w = \text{const})$$

Bei der Berechnung des gesamten Druckverlustes sind die unterschiedlichen Vorzeichen der einzelnen Ausdrücke zu beachten.

$$\Delta p_{\text{ges,Fall}} = \Delta p_H - \Delta p_{R,F} - \Delta p_E = 190900 \text{ Pa}$$

Da $\Delta p_{\text{ges,Fall}} > \Delta p_{\text{ges,Steig}}$ ist Naturumlauf gewährleistet.

Genauere abschnittsweise Rechnung

Um die obigen Ergebnisse zu überprüfen (es wurde die Berechnung nur für den Mittelwert $\dot{x} = 0,1$ durchgeführt), erfolgt noch eine abschnittsweise Berechnung mit 4 Stützstellen im Siedebereich.

x	0,025	0,075	0,125	0,175	
ε	0,304	0,537	0,637	0,696	-
$(dp/dl)_{R,ZP}$	119,4	219,8	307,7	389,5	Pa/m
α_{ZP}	6477	8621	10360	11860	W/m ² K
α_{BS}	36196	36045	35895	35701	W/m ² K
α_x	36391	36445	36530	36592	W/m ² K
ρ_m	543,1	370,9	296,4	253,05	kg/m ³
ΔL	3,032	3,032	3,032	3,032	m

Da im vorliegenden Beispiel $\alpha_x \approx \text{const}$ und $\alpha_x \gg \alpha_a$ ist und damit $\hat{q}(1) = \text{const}$ ist, ergibt sich aus der Energiebilanz eine gleiche Länge für jeden Teilbereich. Aus der Addition der Ergebnisse in den 4 Abschnitten für den Siedebereich ändert sich damit ΔL_3 nicht. Für den Druckverlust im Siedebereich ergeben sich jedoch teilweise andere Werte:

$$\Delta p_R = 3561 \text{ Pa}, \quad \Delta p_H = 144700 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_{\text{ges,Steig}} = 150400 \text{ Pa} \quad (\text{Anstieg um } 3,1 \%)$$

Es gilt weiterhin $\Delta p_{\text{ges,Steig}} < \Delta p_{\text{ges,Fall}}$. In der Realität wird sich ein höherer Massestrom und ein kleinerer Dampfmasseanteil am Austritt einstellen. Diese Aufgabe ist nur iterativ zu lösen, wobei sich alle Werte gegenüber dem Auslegungszustand verändern.

Zusatzaufgabe

Ermittlung des sich einstellenden Betriebspunktes:

vorgegebene Werte – Geometrie, Eintrittstemperatur, Druck

zu variierende Werte – Umlaufmassenstrom \hat{m}

sich verändernde Werte - x_A , ΔL_1 , ΔL_2 , ΔL_3 , α_F , α_{ZP} , Δp_H , $\Delta p_{\text{ges,Steig}}$, $\Delta p_{\text{ges,Fall}}$

Vergleich der wichtigsten Ergebnisse zwischen Auslegung und Betriebspunkt (nach Excel-Programm):

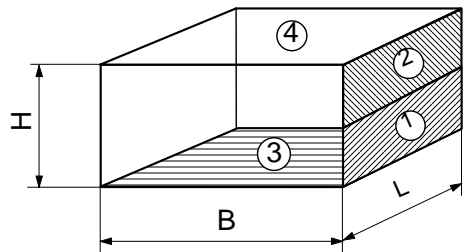
Größe		Auslegung (Teil a)	Betriebspunkt
Massestromdichte	kg / m ² s	500	802
Einphasen WÜ-koeffizient	W / m ² K	4998	7314
Rohrlänge Einphasengebiet	m	4,677	11,77
Rohrlänge unterkühles Sieden	m	8,67	9,622
Rohrlänge Siedebereich	m	12,128	4,173
Zweiphasen WÜ-koeffizient	W / m ² K	9526	9215
Austrittsdampfanteil	-	0,2	0,0429
mittlere Dichte bei Zweiphasenströmung.	kg / m ³	327,8	548,6
Druckänderung Höhenunterschied	Pa	140200	183500
Druckunterschied Steigrohr	Pa	145900	188500
Druckunterschied Fallrohr	Pa	190900	188600
Flüssigkeitstemperatur bei Siedebeginn	°C	224,6	239,0
Wärmeübergangskoeff. BS, unterkühltes Sieden	W / m ² K	30340	28880
Wärmeübergangskoeff. BS, Siedebereich	W / m ² K	35970	35990
Dampfvolumenanteil (Mitte Siedebereich)		0,595	0,296

Es stellt sich eine höhere Massestromdichte und ein deutlich kleinerer Austrittsdampfanteil ein. Damit verschieben sich insbesondere die Rohrlängen für das Einphasengebiet und den Siedebereich. Daraus erkennt man die Problematik bei der Strömung durch viele parallele Rohre, wenn eine ungleiche Beheizung bzw. unterschiedliche Widerstandsbeiwerte vorliegen. Es kann dann in einzelnen Rohren bei ungünstigen Bedingungen zu einer vollständigen Verdampfung im Rohr und damit zu großen Übertemperaturen der Rohrwand mit Rohrschäden kommen.

Lösung Aufgabe 4.1:

Gegeben:	Bürraum	$L = 6 \text{ m}, B = 5 \text{ m}, H = 3 \text{ m}$
	Außenwand	$t_1 = 18 \text{ °C}, \varepsilon_1 = 0,9$ (Sockel unter Fenster)
	Fenster	$t_2 = 13 \text{ °C}, \varepsilon_2 = 0,93, H_2 = 2 \text{ m}, L_2 = 6 \text{ m}$
	Fußboden	$t_3 = 27 \text{ °C}, \varepsilon_3 = 0,95$
	Innenwände	$t_4 = 20 \text{ °C}, \varepsilon_4 = 0,9$

- Gesucht:**
- Einstrahlzahlen für alle Raumflächen
 - ausgesendete Energiestromdichten \hat{s}_i und Wärmeströme \dot{Q}_i
 - Programm nach Netzwerkmethod
 - Wärmeabgabe \dot{Q}_3 nach Näherungsverfahren



H.J.ZI.26022001.BildAufg171.dsf

- a) Für die Berechnungen werden die folgenden Parameter für die Flächen benötigt:

$$A_1 = 1 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 6 \text{ m}^2, \quad \varepsilon_1 = 0,9, \quad T_1 = 291,15 \text{ K}$$

$$A_2 = 2 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 12 \text{ m}^2, \quad \varepsilon_2 = 0,93, \quad T_2 = 286,15 \text{ K}$$

$$A_3 = 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2, \quad \varepsilon_3 = 0,95, \quad T_3 = 300,15 \text{ K}$$

$$A_4 = 2 \cdot 5 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} + 3 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} + 5 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 78 \text{ m}^2, \quad \varepsilon_4 = 0,9, \quad T_4 = 293,15 \text{ K}.$$

Zur Ermittlung der Einstrahlzahlen wird zuerst von den einfachen Fällen ausgegangen (z. B. Fläche nur in einer Ebene, einfache geometrische Beziehung zwischen den Flächen), die sich mit einfachen Überlegungen oder Diagrammen berechnen lassen. Die anderen Einstrahlzahlen werden dann aus den Gesetzen für die Einstrahlzahlen (z. B. Reziprozitätsbeziehung, Summenbeziehung) ermittelt. Die Reihenfolge der Abarbeitung kann vorteilhaft mit der Matrix (siehe unten) dargestellt werden.

$\varphi_{1,3}$: mit Diagramm 5.9 (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung, S.56)

$$B = \frac{1}{6} = 0,166, \quad C = \frac{5}{6} = 0,833 \quad \rightarrow \quad \varphi_{1,3} = 0,4$$

Reziprozitätsbeziehung $\varphi_{3,1} = \varphi_{1,3} \frac{A_1}{A_3} = 0,08$

$\varphi_{2,3}$: Anwendung des Zerlegungssatzes (Zusammenfassung der Flächen 1 und 2, um Diagramm 5.9 anzuwenden). Zuerst wird die Einstrahlzahl von den Flächen $A_1 + A_2$ auf die Fläche A_3 berechnet.

$$B = \frac{3}{6} = 0,5, \quad C = \frac{5}{6} = 0,833 \rightarrow \varphi_{1+2,3} = 0,28$$

Zerlegungssatz

$$A_{1+2} \varphi_{1+2,3} = A_1 \varphi_{1,3} + A_2 \varphi_{2,3} \quad , \quad A_{1+2} = A_1 + A_2$$

$$\rightarrow \varphi_{2,3} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \varphi_{1+2,3} - \frac{A_1}{A_2} \varphi_{1,3} = 0,22$$

Reziprozitätsbeziehung $\varphi_{3,2} = \varphi_{2,3} \frac{A_2}{A_3} = 0,088$

$\varphi_{1,4}$: mit Summenbeziehung für Fläche 1

$$\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} + \varphi_{1,3} + \varphi_{1,4} = 1$$

Da $\varphi_{1,1} = 0$ und $\varphi_{1,2} = 0$ (Flächen liegen in einer Ebene) gilt, wird $\varphi_{1,4} = 1 - \varphi_{1,3} = 0,6$.

Reziprozitätsbeziehung $\varphi_{4,1} = \varphi_{1,4} \frac{A_1}{A_4} = 0,046$

$\varphi_{2,4}$: mit Summenbeziehung für Fläche 2

$$\varphi_{2,1} + \varphi_{2,2} + \varphi_{2,3} + \varphi_{2,4} = 1$$

Da $\varphi_{2,2} = 0$ und $\varphi_{2,1} = 0$ ist, wird $\varphi_{2,4} = 1 - \varphi_{2,3} = 0,78$.

Reziprozitätsbeziehung $\varphi_{4,2} = \varphi_{2,4} \frac{A_2}{A_4} = 0,12$

$\varphi_{3,4}$: mit Summenbeziehung für Fläche 3

$$\varphi_{3,1} + \varphi_{3,2} + \varphi_{3,3} + \varphi_{3,4} = 1$$

Da $\varphi_{3,3} = 0$ ist, gilt $\varphi_{3,4} = 1 - \varphi_{3,1} - \varphi_{3,2} = 0,832$.

Reziprozitätsbeziehung $\varphi_{4,3} = \varphi_{3,4} \frac{A_3}{A_4} = 0,320$

$\varphi_{4,4}$: mit Summenbeziehung für Fläche 4

(da Fläche 4 sich aus mehreren im Winkel zueinander stehenden Teilflächen zusammensetzt, kann $\varphi_{4,4}$ erst bestimmt werden, wenn alle anderen φ bekannt sind).

$$\varphi_{4,1} + \varphi_{4,2} + \varphi_{4,3} + \varphi_{4,4} = 1$$

$$\varphi_{4,4} = 1 - \varphi_{4,1} - \varphi_{4,2} - \varphi_{4,3} = 0,514$$

Zusammenstellung der benötigten Einstrahlzahlen $\varphi_{i,k}$ als Matrix

	i = 1	2	3	4
k = 1	0	0	0,08	0,046
2	0	0	0,088	0,12
3	0,4	0,22	0	0,320
4	0,6	0,78	0,832	0,514
Σ	1	1	1	1

b) Die emittierten Energiestromdichten der vier Flächen als Schwarzer Strahler betrachtet berechnen sich wie folgt:

$$\hat{e}_{s,i} = C_s (T_i/100)^4 \quad , \quad C_s = 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$$\hat{e}_{s,1} = 407,427 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad \hat{e}_{s,2} = 380,153 \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

$$\hat{e}_{s,3} = 460,189 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad \hat{e}_{s,4} = 418,738 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} .$$

Für die emittierte Energiestromdichte der Grauen Strahler gilt $\hat{e}_i = \varepsilon_i \hat{e}_{s,i}$

Die Berechnungsgleichungen für das Gauß-Seidel-Verfahren lauten bei vorgegebener Wandtemperatur (Skript S.88, Gl. (4.8)) bzw. Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.59, Gl. (4).

$$\hat{s}_i = \frac{1}{1 - \varphi_{i,i} (1 - \varepsilon_i)} \left[\varepsilon_i \hat{e}_{S,i} + (1 - \varepsilon_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 \hat{s}_k \varphi_{i,k} \right] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Es liegen 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten ($\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_4$) vor.

Die Berechnungsgleichungen für die Nettowärmeströme (Skript S.86, Gl.(4.2)) lauten mit $\dot{E}_i = \varepsilon_i \hat{e}_{S,i} A_i$ und $\dot{S}_i = \hat{s}_i A_i$

$$\dot{Q}_i = A_i \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\hat{e}_{S,i} - \hat{s}_i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Beginnend mit den Startwerten $\hat{s}_i = \hat{e}_{S,i}$ werden die ausgesendeten Energiestromdichten schrittweise in einer iterativen Rechnung ermittelt. Die Abarbeitungsrichtung erfolgt von $i = 1$ bis 4, wobei bei dem Gauß-Seidel-Verfahren immer die aktuellen Werte von \hat{s}_i (jeweils zuletzt berechnete Werte) verwendet werden. Da beim Rechenablauf mehrfach kleine Differenzen von zwei großen Zahlen auftreten, muss die Rechnung möglichst mit vielen Zahlenstellen durchgeführt werden (mit Speicher von Taschenrechner arbeiten oder mit Excel).

Nach der 2. Iteration ändern sich die Zahlen nur noch nach der 3. Stelle nach dem Komma (schnelle Konvergenz!).

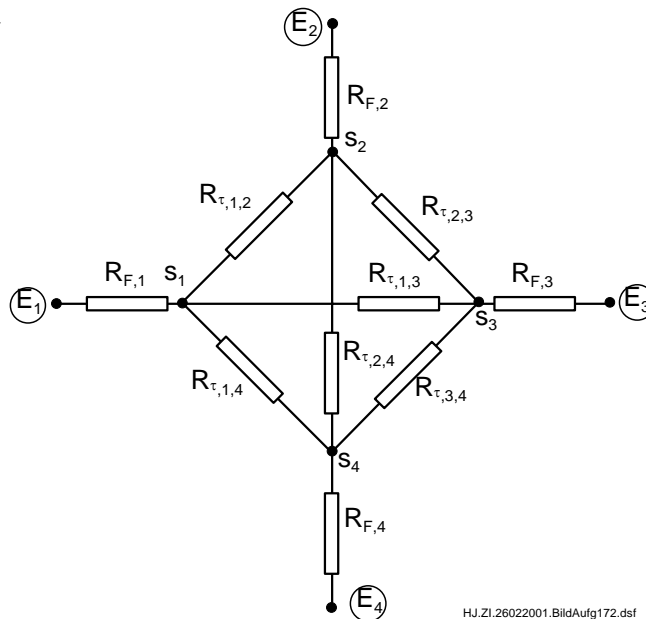
	\hat{s}_1	\hat{s}_2	\hat{s}_3	\hat{s}_4 in W/m ²
Startwert	407,427	380,153	460,189	418,738
1.Iteration	410,216	383,492	457,927	419,573
2.Iteration	410,176	383,503	457,962	419,574
	\dot{Q}_1	\dot{Q}_2	\dot{Q}_3	\dot{Q}_4 in W
	-148,4 W	-534,1 W	1269,4 W	-586,9 W

Die Probe $\sum_{i=1}^4 \dot{Q}_i = 0$ stimmt.

Der Fußboden gibt Wärme ab (Nettowärmestrom > 0 muss Fußboden zugeführt werden). Die anderen Flächen nehmen Wärme auf (Nettowärmestrom < 0). Durch die Gebäudewände bzw. Fenster tritt ein Wärmeverlust an die Umgebung auf, der durch den Strahlungsenergiestrom ausgeglichen werden muss.

c) Die obige Aufgabe kann auch mit der Netzwerkmethodologie gelöst werden. Im Einzelnen sind die folgenden Schritte auszuführen (vgl. Skript S.89-91).

Ersatzschaltbild



HJ.ZI.26022001.BildAufg172.dsf

Nettowärmewiderstände

$$R_{F,i} = \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1 \right) \frac{1}{A_i}$$

$$R_{F,1} = 0,01852 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{F,2} = 0,006272 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{F,3} = 0,001754 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{F,4} = 0,001424 \frac{1}{\text{m}^2}$$

Transmissionswiderstände

$$R_{\tau,i,j} = \frac{1}{A_i \varphi_{i,j}} = R_{\tau,j,i}$$

$$R_{\tau,1,2} = \infty \quad (\text{da } \varphi_{12} = 0, \text{ keine Verbindung}), \quad R_{\tau,1,3} = 0,4167 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{\tau,1,4} = 0,278 \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$R_{\tau,2,3} = 0,379 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{\tau,2,4} = 0,107 \frac{1}{\text{m}^2}, \quad R_{\tau,3,4} = 0,0401 \frac{1}{\text{m}^2}$$

Berechnungsgleichungen (Energiebilanzen an Knoten S₁ bis S₄)

$$\frac{\hat{e}_{S,1} - \hat{s}_1}{R_{F,1}} + \frac{\hat{s}_3 - \hat{s}_1}{R_{\tau,1,3}} + \frac{\hat{s}_4 - \hat{s}_1}{R_{\tau,1,4}} = 0$$

$$\frac{\hat{e}_{S,2} - \hat{s}_2}{R_{F,2}} + \frac{\hat{s}_3 - \hat{s}_2}{R_{\tau,2,3}} + \frac{\hat{s}_4 - \hat{s}_2}{R_{\tau,2,4}} = 0$$

$$\frac{\hat{e}_{S,3} - \hat{S}_3}{R_{F,3}} + \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_3}{R_{\tau,1,3}} + \frac{\hat{S}_2 - \hat{S}_3}{R_{\tau,2,3}} + \frac{\hat{S}_4 - \hat{S}_3}{R_{\tau,3,4}} = 0$$

$$\frac{\hat{e}_{S,4} - \hat{S}_4}{R_{F,4}} + \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_4}{R_{\tau,1,4}} + \frac{\hat{S}_2 - \hat{S}_4}{R_{\tau,2,4}} + \frac{\hat{S}_3 - \hat{S}_4}{R_{\tau,3,4}} = 0$$

Das Gleichungssystem (4 Gleichungen mit 4 Unbekannten) muss nach entsprechenden Lösungsmethoden (direkte oder Iterationsverfahren) gelöst werden. Vorteilhaft wird ein EDV-Programm verwendet. Es ergeben sich, von geringen numerischen Abweichungen abgesehen, dieselben Werte wie nach dem Gauß-Seidel-Verfahren unter b).

d) Die Berechnung der Wärmeabgabe des Fußbodens kann vorteilhaft mit Näherungsverfahren erfolgen, wenn die anderen Nettowärmeströme nicht interessieren.

konventionelles Näherungsverfahren

Nach Gl.(4.16) im Skript S.92 bzw. Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.58 ergibt sich

$$\dot{Q}_3 = \varepsilon_3 A_3 \left[\varphi_{3,1} \varepsilon_1 (\dot{e}_{S,3} - \dot{e}_{S,1}) + \varphi_{3,2} \varepsilon_2 (\dot{e}_{S,3} - \dot{e}_{S,2}) + \varphi_{3,4} \varepsilon_4 (\dot{e}_{S,3} - \dot{e}_{S,4}) \right]$$

Der Ausdruck für $k=3$ entfällt, da $\varphi_{3,3} = 0$ ist bzw. bei $i = k$ auch $\hat{e}_{S,i} = \hat{e}_{S,k}$ gilt.

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $\dot{Q}_3 = 1179,5 \text{ W}$.

Der relative Fehler gegenüber der obigen exakten Berechnung beträgt

$$f_{\text{rel}} = \frac{1179,5 - 1269,4}{1269,4} \cdot 100\% = -7,08\%$$

Näherungsverfahren nach Glück

Mit dem Verfahren von Glück (Skript S.93 bzw. Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.59) kann eine höhere Genauigkeit erreicht werden.

Die mittlere Flächenhelligkeit beträgt

$$f_m = \frac{\varepsilon_1 \hat{e}_{S,1} A_1 + \varepsilon_2 \hat{e}_{S,2} A_2 + \varepsilon_3 \hat{e}_{S,3} A_3 + \varepsilon_4 \hat{e}_{S,4} A_4}{\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_3 A_3 + \varepsilon_4 A_4} = 424,722 \text{ W/m}^2$$

Der Nettowärmestrom für den Fußboden wird nach Gl.(4.17) im Skript S.93 bzw. Umdruck S.59 berechnet.

$$\dot{Q}_3 = \hat{q}_3 A_3 = A_3 \{ \varepsilon_3 \hat{e}_{S,3} - \varepsilon_3 [\varphi_{3,1} (\varepsilon_1 \hat{e}_{S,1} + (1 - \varepsilon_1) f_m) + \varphi_{3,2} (\varepsilon_2 \hat{e}_{S,2} + (1 - \varepsilon_2) f_m) + \varphi_{3,4} (\varepsilon_4 \hat{e}_{S,4} + (1 - \varepsilon_4) f_m)] \}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $\dot{Q}_3 = 1277,96 \text{ W}$.

Der relative Fehler beträgt $f_{\text{rel}} = \frac{1277,96 - 1269,4}{1269,4} \cdot 100\% = 0,67\%$.

Unter den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe (alle $\varepsilon \geq 0,9$) liefern die Näherungsverfahren für die praktische Rechnung ausreichend genaue Ergebnisse.

Zusatz

Es soll zusätzlich gezeigt werden, wie mit dem äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten α_{Str} auch näherungsweise eine Lösung erhalten werden kann. Die Verwendung von α_{Str} ist besonders dann vorteilhaft, wenn auch der Wärmeübergang durch Konvektion betrachtet wird. Nach Skript S.96 gilt bei einer Mehrflächenstrahlung näherungsweise für eine flächengewichtete mittlere Wandtemperatur für alle an der Strahlung beteiligte Flächen

$$T_m = \frac{\sum_{k=1}^4 T_k A_k}{\sum_{k=1}^4 A_k} = 294,055 \text{ K}$$

Der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung berechnet sich aus

$$\alpha_{\text{Str},i} = \frac{4 \varepsilon_i C_S}{100} \left(\frac{T_m}{100} \right)^3$$

und der übertragene Wärmestrom infolge Strahlung zu

$$\dot{Q}_i = \alpha_{\text{Str},i} A_i (T_{W,i} - T_{W,m})$$

mit der gemittelten Wandtemperatur für die Strahlung zu den anderen Flächen

$$T_{W,m} = \sum_{k=1}^4 \varphi_{i,k} T_{W,k}$$

Die 3 Näherungsmethoden (konventionelles Näherungsverfahren, Verfahren nach Glück, Verfahren mit α_{Str}) sollen für alle Flächen getestet werden.

i	Verfahren mit α_{Str}				konv. Verfahren		Verfahren Glück	
	$T_{W,m}$	α_{Str}	\dot{Q}	Fehler	\dot{Q}	Fehler	\dot{Q}	Fehler
	K	$\text{W/m}^2 \text{K}$	W	%	W	%	W	%
1	295,950	5,190	-149,5	+0,8	-141,25	-4,8	-148,72	+0,2
2	294,690	5,363	-549,6	+2,9	-488,97	-8,5	-533,23	-0,2
3	292,374	5,478	1277,9	+0,7	1179,5	-7,1	1277,96	+0,7
4	294,458	5,190	-529,5	-9,78	-549,44	-6,4	-583,21	-0,6
mittlerer relativer Fehler				3,55		6,7		0,43
Summe Wärmeströme			49,3		-0,16		12,8	

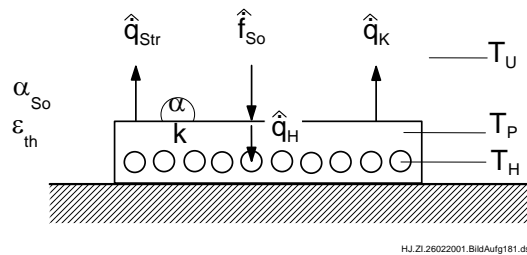
Das Verfahren von Glück liefert für alle Flächen sehr gute Werte. Bei dem Verfahren mit α_{Str} fällt die Fläche 4 bei der Genauigkeit ab, da die Wechselwirkung mit der eigenen Fläche ($\phi_{4,4} = 0,514$) schlecht erfasst wird. Das konventionelle Verfahren ist das schlechteste von den 3 betrachteten Verfahren und liefert immer zu kleine Werte.

Die Summe der Wärmeströme ist bei dem konventionellen Verfahren gleich Null (geringe Rechenungenauigkeiten). Bei dem Verfahren von Glück und dem Verfahren mit α_{Str} stimmt diese Bilanz jedoch nicht, was im Aufbau dieser Näherungsverfahren begründet ist.

Lösung Aufgabe 4.2:

Gegeben:	Sonnenstrahlung	$\hat{f}_{\text{So}} = 750 \text{ W/m}^2$
	Kollektorplatte	$\alpha_{\text{So}} = 0,9, \quad \varepsilon_{\text{th}} = 0,9, \quad k = 250 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
	Umgebung	$T_{\text{U}} = 290 \text{ K}, \quad \alpha = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
	Wasser	$t_{\text{H}} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$.

- Gesucht:**
- von Wasser aufgenommener Wärmestrom \hat{q} pro m^2
 - Wärmestromdichte \hat{q} bei $\alpha = 20 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
 - maximale Plattentemperatur $t_{\text{P,a}}$ und $t_{\text{P,b}}$

Anordnung

Die gesuchte vom Wasser aufgenommene Wärmestromdichte \hat{q}_{H} kann aus der Energiebilanz für die Platte ermittelt werden, da alle anderen Wärmestromdichten berechnet werden können.

$$\hat{q}_{\text{So}} = \hat{q}_{\text{Str}} + \hat{q}_{\text{K}} + \hat{q}_{\text{H}}$$

Die von der Platte aufgenommene Sonnenenergiestromdichte beträgt

$$\hat{q}_{\text{So}} = \alpha_{\text{So}} \hat{f}_{\text{So}}$$

Von der Platte wird durch Strahlung die folgende Energiestromdichte an die Umgebung abgegeben (Zweiflächenstrahlung für den Fall des eingeschlossenen Körpers).

$$\hat{q}_{\text{Str}} = \varepsilon_{\text{th}} C_{\text{S}} \left[\left(\frac{T_{\text{P}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{U}}}{100} \right)^4 \right]$$

Von der Platte wird durch Konvektion die Energiestromdichte

$$\hat{q}_{\text{K}} = \alpha (T_{\text{P}} - T_{\text{U}})$$

Die an das Rohrsystem abgegebene Energiestromdichte beträgt

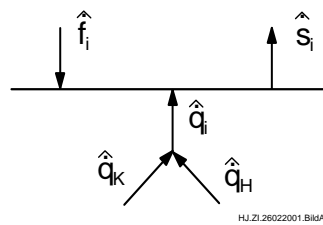
$$\hat{q}_H = k (T_P - T_H).$$

Einsetzen der Ausdrücke in die Energiebilanz liefert

$$\alpha_{S_0} \hat{f}_{S_0} = \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_U}{100} \right)^4 \right] + \alpha (T_P - T_U) + k (T_P - T_H) \quad (1)$$

Die Plattentemperatur T_P muss aus dieser Gleichung iterativ ermittelt werden.

Die Herleitung von Gl.(1) kann auch mit den Unterlagen für eine Mehrflächenstrahlung erfolgen.



Die Bilanzgleichung für die Plattenoberfläche (Index i gilt für Platte) lautet

$$\hat{q}_i = \hat{s}_i - \hat{f}_i$$

Die Nettowärmestromdichte setzt sich aus den beiden Energiestromdichten \hat{q}_K und \hat{q}_H zusammen (beachte Vorzeichendefinition - der Fläche i zugeführte Energie ist positiv).

$$\hat{q}_i = \hat{q}_K + \hat{q}_H = \alpha (T_U - T_P) + k (T_H - T_P)$$

Die von der Umgebung auf die Platte treffende Energiestromdichte ergibt sich wie folgt:

$$\frac{\dot{S}_{U,P}}{A_P} = \frac{\hat{s}_{U,P} A_U}{A_P} = \frac{\hat{s}_U \varphi_{U,P} A_U}{A_P} = \frac{\hat{s}_U \varphi_{P,U} A_P}{A_P} = \hat{s}_U$$

Es gilt $\varphi_{P,U} = 1$, da die gesamte von der Platte abgegebene Strahlung auf die Umgebung gelangt.

Weiterhin gilt $\hat{s}_U = \hat{e}_{s,U} = C_S (T_U/100)^4$, da bei sehr großer Fläche der Flächenwiderstand Null und $\hat{s} = \hat{e}_s$ ist.

Die gesamte auf die Platte auftreffende Energiestromdichte beträgt somit

$$\hat{f}_i = \hat{f}_{S_0} + C_S \left(\frac{T_U}{100} \right)^4$$

Die gesamte von der Platte ausgesendete Energiestromdichte berechnet sich zu

$$\hat{s}_i = \underbrace{(1 - \alpha_{S_0}) \hat{f}_{S_0}}_{\text{reflektierte Sonnenstrahlung}} + \underbrace{(1 - \varepsilon_{th}) C_S \left(\frac{T_U}{100} \right)^4}_{\text{reflektierte Umgebungsstrahlung}} + \underbrace{\varepsilon_{th} C_S \left(\frac{T_P}{100} \right)^4}_{\text{emittierte Strahlung der Platte}}$$

Das Einsetzen in die Bilanzgleichung liefert dieselbe Gleichung wie oben.

$$\alpha (T_U - T_P) + k (T_H - T_P) = -\alpha_{S_0} \hat{f}_{S_0} + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_U}{100} \right)^4 \right].$$

Diese Herleitung ist zu verwenden, wenn eine Mehrflächenstrahlung vorliegt. Im Beispiel ist jedoch nur eine Zweiflächenstrahlung (zwischen Platte und Umgebung) zu behandeln, weshalb dafür die erste Herleitung gebräuchlicher ist. Bei Mehrflächenstrahlung sind vorteilhaft die Gln.(4.8) im Skript S.88 und das Gauß-Seidel-Verfahren zu verwenden.

a) Die Bestimmung der Plattentemperatur aus Gl.(1) erfolgt iterativ durch Annahmen für die Plattentemperatur und Interpolation. Zuerst wird aus Gl.(1) mit den gegebenen Größen eine Zahlenwertgleichung aufgestellt.

$$0,9 \cdot 750 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - 2,9^4 \text{K}^4 \right] \\ + 5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (T_P - 290 \text{K}) + 250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (T_P - 313,15 \text{K}) \\ 5,103 \left(\frac{T_P}{100 \text{K}} \right)^4 + 255 \frac{T_P}{\text{K}} = 80848,425$$

1. Annahme: $T_P = 310 \text{K} \rightarrow 79521,27 \neq 80848,425$

2. Annahme: $T_P = 320 \text{K} \rightarrow 82135,09 \neq 80848,425$

Interpolation

$$T_P = 310 \text{K} + \frac{80848,425 - 79521,27}{82135,09 - 79521,27} (320 - 310) \text{K} = 315,08 \text{K}$$

Kontrolle: $80848,3 \approx 80848,425$. Mit einem Excel-Programm und Zielwertsuche kann effektiv die Plattentemperatur ermittelt werden.

Mit der nun bekannten Plattentemperatur kann die vom Wasser aufgenommene Energiestromdichte berechnet werden.

$$\hat{q}_H = k (T_P - T_H) = 250 (315,08 - 313,15) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 482,5 \text{ W/m}^2.$$

b) Z. B. bei Auftreten von Wind vergrößert sich der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Platte und Umgebung. Mit dem Wert $\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ erhält man aus der Zahlenwertgleichung

$$5,103 (T_P/100)^4 + 270 T_P = 85123,4$$

nach der iterativen Lösung eine Plattentemperatur von $T_P = 313,45 \text{ K}$ und damit eine von dem Wasser aufgenommene Energiestromdichte von

$$\hat{q}_H = 75 \text{ W/m}^2.$$

Durch den besseren äußeren Wärmeübergang verringert sich die Plattentemperatur und die Nutzenergie. Bei einer ausgeführten Anlage würde sich durch den nachgeschalteten Prozess die Wassertemperatur auch verringern und dadurch \hat{q}_H ansteigen, so dass es zu einer größeren Nutzenergie bei einer kleineren Wassertemperatur kommt.

c) Die maximale Plattentemperatur tritt auf, wenn keine Energie durch das Wasser abgeführt wird.

Es gilt $T_P = T_H$ und Gl.(1) vereinfacht sich, da $\hat{q}_H = 0$ ist. Es ist auch weiterhin eine iterative Rechnung erforderlich. Es werden wieder die zwei Fälle für α betrachtet.
 $\alpha = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$:

$$0,8 \cdot 750 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - 2,9^4 \text{ K}^4 \right] + 5 (T_P - 290 \text{ K})$$

$$5,103 \left(\frac{T_P}{100} \right)^4 + 5 T_P = 2485,92$$

$$\rightarrow T_P = 347,8 \text{ K} = 74,6 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}): \quad 5,103 \left(\frac{T_P}{100} \right)^4 + 20 T_P = 6835,92$$

$$\rightarrow T_P = 316,3 \text{ K} = 43,15 \text{ }^\circ\text{C}.$$

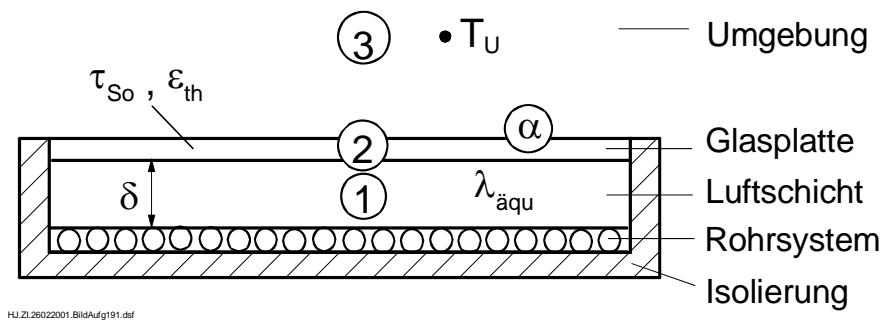
Auch hier zeigt sich ein deutlicher Einfluss des konvektiven Wärmeüberganges auf die erreichbare Plattentemperatur. Um eine hohe Effektivität des Sonnenkollektors zu gewährleisten, ist der konvektive Wärmeübergang zu reduzieren (z. B. Windschutz, Glasschicht und Luftspalt über Platte \rightarrow siehe Aufg. 4.3).

Lösung Aufgabe 4.3:

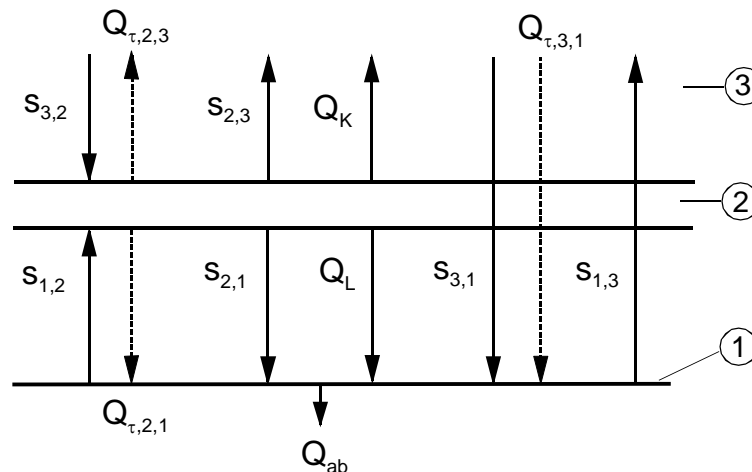
Gegeben:	Sonnenstrahlung	$\hat{f}_{So} = 750 \text{ W/m}^2,$
	Glasplatte	$\tau_{So} = 1, \epsilon_{th} = \alpha_{th} = 0,9, \tau_{th} = 0$
	Luftschicht	$\delta = 5 \text{ cm}, \lambda_{\text{äqu}} = 0,04 \text{ W/(m K)}$
	Rohrsystem	$\epsilon = \alpha = 1$
	Umgebung	$T_U = 290 \text{ K}, \alpha_{Konv} = 20 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

- Gesucht:**
- a) Temperatur t_G und t_R für Glasplatte und Rohrsystem (ohne Wärmeabfuhr im Rohrsystem)
 - b) abgeführte Wärmestromdichte \hat{q} durch Wasser bei einer Wassertemperatur $t_W = 40^\circ\text{C}$ und Glastemperatur t_G

Anordnung



Energieströme



Der vom Rohrsystem (Schwarzer Strahler) ausgesendete Energiestrom beträgt

$$\dot{S}_{1,2} = \dot{E}_1 = C_s A (T_1/100)^4$$

Für den von der Glasplatte zum Rohrsystem ausgesendeten Energiestrom gilt

$$\dot{S}_{2,1} = \dot{E}_2 + \rho_2 \dot{F}_2 = \left[\varepsilon_{\text{th}} C_S \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 + \rho_2 C_S \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] A$$

Die gesamte auf die untere Seite der Glasplatte auftreffende Strahlungsenergie beträgt $\dot{F}_2 = \dot{S}_{1,2}$.

Da die Glasplatte für thermische Strahlung undurchlässig ist ($\tau_{\text{th}} = 0$), ist $\rho_2 = 1 - \varepsilon_{\text{th}}$. Damit wird für den Transmissionswärmestrom zwischen 2 und 1

$$\dot{Q}_{\tau,2,1} = \dot{S}_{2,1} - \dot{S}_{1,2} = \varepsilon_{\text{th}} A C_S \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right]$$

Man erhält somit die bekannte Gleichung für einen Zweiflächenstrahlungsaustausch zwischen parallelen Platten ($C_{1,2} = \varepsilon_{\text{th}} C_S$, da $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{th}}$). Wenn ein enger Luftspalt und große Platten vorausgesetzt werden, kann die Anordnung als ebener eindimensionaler Fall betrachtet werden, und es gilt für die Einstrahlzahlen $\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = 1$.

In ähnlicher Weise ergibt sich für den Transmissionswärmestrom zwischen der Glasplatte und der Umgebung ($C_{2,3} = \varepsilon_{\text{th}} C_S$, da $A_3 \gg A_2$) mit der Umgebungstemperatur $T_3 = T_U$.

$$\dot{Q}_{\tau,2,3} = \dot{S}_{2,3} - \dot{S}_{3,2} = \varepsilon_{\text{th}} C_S A \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right].$$

Der Transmissionswärmestrom zwischen Umgebung (Sonne) und Rohrsystem beträgt

$$\dot{Q}_{\tau,3,1} = \dot{S}_{3,1} - \dot{S}_{1,3} = \hat{f}_{S_0} A \tau_{S_0}$$

Es geht die gesamte Sonnenstrahlung zur Fläche 1, da $\tau_{S_0} = 1$ ist (bei $\tau_{S_0} < 1$ wird ein Teil der Sonnenstrahlung an der Glasoberfläche reflektiert). Weiterhin gilt $\dot{S}_{1,3} = 0$, da die Glasplatte undurchlässig für die thermische Strahlung ist und vom Rohrsystem nur thermische Strahlung abgegeben wird.

Für den konvektiven Wärmestrom von der Glasplatte zur Umgebung gilt

$$\dot{Q}_K = \alpha_{\text{Konv}} A (T_2 - T_3)$$

Der Wärmestrom durch Leitung und Konvektion von der Glasplatte zum Rohrsystem berechnet sich zu

$$\dot{Q}_L = \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} A (T_2 - T_1)$$

Die Energiebilanz für die Glasplatte liefert

$$\begin{aligned}\dot{S}_{3,2} - \dot{S}_{2,3} + \dot{S}_{1,2} - \dot{S}_{2,1} - \dot{Q}_K - \dot{Q}_L &= 0 \\ -\dot{Q}_{\tau,2,3} - \dot{Q}_{\tau,2,1} - \dot{Q}_K - \dot{Q}_L &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Die Vorzeichen gelten entsprechend der festgelegten Richtung im Bild. Andere Definitionen sind ebenfalls möglich. Wenn die wirklichen Richtungen für die Wärmeströme anders sind (z. B. bei \dot{Q}_L), ergeben sich für diese Größen negative Zahlenwerte.

Für die Energiebilanz für das Rohrsystem gilt entsprechend

$$\begin{aligned}\dot{S}_{2,1} - \dot{S}_{1,2} + \dot{S}_{3,1} - \dot{S}_{1,3} + \dot{Q}_L - \dot{Q}_{ab} &= 0 \\ \dot{Q}_{\tau,2,1} + \dot{Q}_{\tau,3,1} + \dot{Q}_L - \dot{Q}_{ab} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Das Einsetzen der Ausdrücke für \dot{Q} liefert 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten (T_1, T_2).

Aus Gl.(1) und (2) wird nach Elimination von $\dot{Q}_{\tau,2,1}$ und \dot{Q}_L (bzw. T_1)

$$\dot{Q}_{\tau,2,3} + \dot{Q}_K - \dot{Q}_{\tau,3,1} + \dot{Q}_{ab} = 0 \quad (3)$$

In Abhängigkeit von den gegebenen und gesuchten Größen wird von den Gleichungen (1), (2) oder (3) ausgegangen. Es ist stets eine iterative Lösung erforderlich.

a) Es erfolgt keine Wärmeabgabe durch das Rohrsystem. Mit $\dot{Q}_{ab} = 0$ wird aus Gl.(3)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right] + \alpha_{Konv} (T_2 - T_3) - \hat{f}_{So} \tau_{So} &= 0 \\ 0,9 \cdot 5,67 \frac{W}{m^2 K^4} \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - 2,9^4 K^4 \right] + 20 \frac{W}{m^2 K} (T_2 - 290K) - 750 \frac{W}{m^2} &= 0 \\ 5,103 \left(\frac{T_2}{100 K} \right)^4 + 20 \frac{T_2}{K} &= 6910,93\end{aligned}$$

iterative Lösung:

1. Annahme $T_2 = 320 K \rightarrow 6935,09 \neq 6910,93$
2. Annahme $T_2 = 315 K \rightarrow 6802,42 \neq 6910,93$

Für die Temperatur der Glasplatte ergibt sich durch eine lineare Interpolation

$$T_2 = 315 \text{ K} + \frac{6910,93 - 6802,42}{6935,09 - 6802,42} (320 - 315) \text{ K} = 319,1 \text{ K}$$

$$t_G = t_2 = 45,95 \text{ °C}$$

Kontrolle $6911,1 \approx 6910,93$

Aus Gl.(1) oder (2) muss ebenfalls auf iterativem Wege die Temperatur T_1 für das Rohrsystem ermittelt werden. Aus Gl.(1) wird

$$-\varepsilon_{\text{th}} C_S \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right] - \varepsilon_{\text{th}} C_S \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] - \alpha_{\text{Konv}} (T_2 - T_3) - \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} (T_2 - T_1) = 0$$

$$-0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \left[3,191^4 \text{ K}^4 - 2,9^4 \text{ K}^4 + 3,191^4 \text{ K}^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right]$$

$$-20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (319,1 - 290) \text{ K} - \frac{0,04}{0,05} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (319,1 \text{ K} - T_1) = 0$$

$$5,103 \left(\frac{T_1}{100 \text{ K}} \right)^4 + 0,8 \frac{T_1}{\text{K}} = 1534,54$$

iterative Lösung:

1. Annahme $T_1 = 400 \text{ K} \rightarrow 1626,37 \neq 1534,54$

2. Annahme $T_1 = 390 \text{ K} \rightarrow 1492,55 \neq 1534,54$

$$T_1 = 390 \text{ K} + \frac{1534,54 - 1492,55}{1626,37 - 1492,55} (400 - 390) \text{ K} = 393,1 \text{ K}$$

Kontrolle $1533,0 \approx 1534,54$

Eine nochmalige Korrektur liefert $T_1 = 393,2 \text{ K}$ bzw. $t_R = t_1 = 120,05 \text{ °C}$. Auf Grund der guten Isolierwirkung durch die Luftschicht im Kollektor stellt sich am Rohrsystem eine sehr hohe Temperatur ein.

b) Die Wassertemperatur ist vorgegeben und ist gleich der Oberflächentemperatur des Rohrsystems

$$T_1 = t_W + 273,15 \text{ K} = 40 \text{ °C} + 273,15 \text{ K} = 313,15 \text{ K}.$$

Aus Gl.(1) wird (Ansatz wie bei a))

$$\begin{aligned}
 & -0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - 2,9^4 \text{K}^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - 3,1315^4 \text{K}^4 \right] \\
 & - 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (T_2 - 290 \text{K}) - \frac{0,04}{0,05} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (T_2 - 313,15 \text{K}) = 0 \\
 & 10,206 \left(\frac{T_2}{100 \text{K}} \right)^4 + 20,8 \frac{T_2}{\text{K}} = 6902,12
 \end{aligned}$$

iterative Lösung:

1. Annahme $T_2 = 300 \text{K} \rightarrow 7066,69 \neq 6902,12$
2. Annahme $T_2 = 290 \text{K} \rightarrow 6753,85 \neq 6902,12$

$$T_2 = 290 \text{K} + \frac{6902,12 - 6753,85}{7066,69 - 6753,85} (300 - 290) \text{K} = 294,7 \text{K}$$

Kontrolle $6899,5 \approx 6902,12$

Eine nochmalige Korrektur liefert für die Glastemperatur $T_2 = 294,8 \text{K}$ bzw. $t_2 = 21,65 \text{°C}$.

Die Berechnung der vom Rohrsystem aufgenommenen Wärmestromdichte nach Gl.(2) ergibt

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_{ab} &= \frac{\dot{Q}_{ab}}{A} = \varepsilon_{\text{th}} C_s \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] + \hat{f}_{\text{So}} + \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} (T_2 - T_1) \\
 \hat{q}_{ab} &= 0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} [2,948^4 - 3,1315^4] \text{K}^4 + 750 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} + \frac{0,04}{0,05} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (294,8 - 313,15) \text{K} \\
 \hat{q}_{ab} &= 630 \text{W} / \text{m}^2.
 \end{aligned}$$

84 % der zugestrahlten Sonnenenergie werden bei diesem Sonnenkollektor in fühlbare Wärme des Wassers umgesetzt.

Im Vergleich zur Aufg. 4.2 kann mit dieser Konstruktion eine höhere Energie abgeführt werden. Dies ist im wesentlichen auf die gute Isolierwirkung der Luftschicht zwischen der Glasplatte und dem Rohrsystem zurückzuführen. In der Praxis wird ein hoher Wirkungsgrad der Solarkollektoren durch entsprechende Anstriche für das Rohrsystem (mit $\varepsilon \approx 1$) und einer Teilevakuierung des Luftspaltes bzw. durch zusätzliche Reflexionsflächen, die die Sonnenstrahlung auf die Rohre lenken, erreicht. Mit einigen Annahmen (z. B. $\varepsilon = 1$, $\tau_{\text{So}} = 1$, $\tau_{\text{th}} = 0$, $\varphi_{1,2} = 1$) konnte der Lösungsweg noch einfach gehalten werden. Bei genauerer Betrachtung muss eine getrennte Berechnung für 2 Spektralbereiche (kurzwellige Sonnenstrahlung und langwellige thermische Strahlung der Wände) vorgenommen werden. Z. B. bei $\varepsilon < 1$ für das Rohrsystem kommen die

unterschiedlichen Eigenschaften in den beiden Spektralbereichen zum Tragen, da die Reflexionen am Rohrsystem aus lang- und kurzwelliger Strahlung bestehen. Die berechneten Nettowärmeströme werden zum Schluss addiert. Erfolgt die Lösung mit der Netzwerkmethod, sind entsprechend 2 Ersatzbilder aufzustellen.

Zusatz

Auch diese Aufgabe kann in guter Näherung mit Hilfe des äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten infolge Strahlung α_{Str} gelöst werden. Dazu müssen zuerst geeignete Annahmen für die Temperaturen der Flächen gemacht werden. Für Teil b) wird die Annahme $t_2 = 25 \text{ °C}$ getroffen. Für eine Zweiflächenstrahlung gilt nach Skript S.96 bzw. Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.61 mit $C_{1,2} = \varepsilon_{\text{th}} C_S = C_{2,3}$ näherungsweise

$$\alpha_{\text{Str},12} = \frac{4 \varepsilon_{\text{th}} C_S}{100} \left(\frac{0,5(T_1 + T_2)}{100} \right)^3 = 5,828 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

$$\alpha_{\text{Str},23} = \frac{4 \varepsilon_{\text{th}} C_S}{100} \left(\frac{0,5(T_2 + T_3)}{100} \right)^3 = 5,191 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Für die Bestimmung der Glastemperatur gilt die Energiebilanz

$$\left(\alpha_{\text{Str},12} + \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} \right) (t_1 - t_2) = (\alpha_{\text{Str},23} + \alpha) (t_2 - t_3).$$

Daraus wird

$$t_2 = \frac{\left(\alpha_{\text{Str},12} + \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} \right) t_1 + (\alpha_{\text{Str},23} + \alpha) t_3}{\alpha_{\text{Str},12} + \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta} + \alpha_{\text{Str},23} + \alpha} = 21,67 \text{ °C}$$

Trotz ungenauer Annahme von t_2 ergibt sich fast der richtige Wert.

Zur Berechnung des Wärmeverlustes des Sonnenkollektors kann ein Wärmedurchgangskoeffizient k definiert werden.

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_{\text{Str},12} + \frac{\lambda_{\text{äqu}}}{\delta}} + \frac{1}{\alpha_{\text{Str},23} + \alpha} \right)^{-1} = 5,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}.$$

Damit ergibt sich sehr einfach die vom Rohrsystem aufgenommene Energiestromdichte aus einer Energiebilanz für den Kollektor

$$\hat{q} = \hat{f}_{S_0} - k(t_1 - t_U) = 628,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Damit kann sehr einfach ohne Berechnung der Glastemperatur die abgeführte Wärmestromdichte berechnet werden. Zur Sicherheit ist jedoch die angenommene Glastemperatur zu kontrollieren.

Für Teil a) erhält man mit den Annahmen $t_1 = 100^\circ\text{C}$ und $t_2 = 40^\circ\text{C}$ die Werte $\alpha_{\text{Str},12} = 8,25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $\alpha_{\text{Str},23} = 6,174 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $k = 6,724 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ und aus der Energiebilanz für den Kollektor mit $\hat{q} = 0$

$$t_1 = t_U + \frac{\hat{f}_{S_0}}{k} = 128,4^\circ\text{C}$$

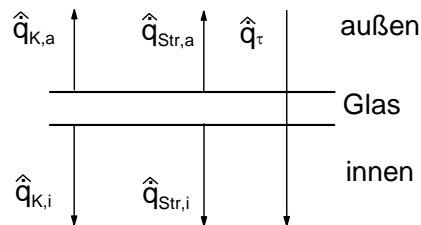
und für die Glastemperatur aus obiger Gl. $t_2 = 45,5^\circ\text{C}$. Mit diesen erhaltenen Werten kann die Rechnung nochmals durchgeführt werden und es ergeben sich gute Werte.

Einschränkend muss bemerkt werden, dass diese Methoden nur bei einer Zweiflächenstrahlung und bei gleicher Temperatur von Umgebungsluft und Umgebungstemperatur für die Strahlung gilt. Besonderheiten der selektiven Strahlungseigenschaften der Glasplatte können nur bedingt erfasst werden.

Lösung Aufgabe 4.4:

Gegeben:	klares Glas	$\tau_1 = 0,9, \rho_1 = 0,1$
	Absorptionsglas	$\alpha_2 = 0,5, \tau_2 = 0,4, \rho_2 = 0,1$
	Konvektion	$\alpha_{\text{Konv}} = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
	thermische Strahlung	$\varepsilon_{\text{th}} = \alpha_{\text{th}} = 0,9, \tau_{\text{th}} = 0$
	Raum/Umgebung	$t_{\text{R}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}, t_{\text{U}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$
	Solarstrahlung	$\hat{f}_{\text{s}} = 500 \text{ W}/\text{m}^2$

Gesucht: Temperatur der beiden Glasarten und Energiestromdichten in den Raum

klare Glasscheibe

HJ.ZI.27022001.BildAufg201.dsf

Die von der Glasscheibe nach außen abgegebene konvektive Wärmestromdichte beträgt

$$\hat{q}_{\text{K,a}} = \alpha_{\text{Konv}} (T_{\text{G}} - T_{\text{U}}).$$

Die von der Glasscheibe an den Raum abgegebene Wärmestromdichte infolge Konvektion beträgt

$$\hat{q}_{\text{K,i}} = \alpha_{\text{Konv}} (T_{\text{G}} - T_{\text{R}}).$$

Der Strahlungsaustausch zwischen Glasscheibe und Umgebung berechnet sich zu

$$\hat{q}_{\text{Str,a}} = \varepsilon_{\text{th}} C_{\text{S}} \left[\left(\frac{T_{\text{G}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{U}}}{100} \right)^4 \right].$$

Für den Strahlungsaustausch zwischen Glasscheibe und Raum gilt

$$\hat{q}_{\text{Str,i}} = \varepsilon_{\text{th}} C_{\text{S}} \left[\left(\frac{T_{\text{G}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{R}}}{100} \right)^4 \right].$$

Die Bestimmung der Temperatur der Glasscheibe erfolgt mit der Energiebilanz für die Glasscheibe.

$$\hat{q}_{K,a} + \hat{q}_{K,i} + \hat{q}_{Str,a} + \hat{q}_{Str,i} = 0 \quad .$$

$$\alpha_{Konv} (T_G - T_U) + \alpha_{Konv} (T_G - T_R) + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_G}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_U}{100} \right)^4 \right] \\ + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_G}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right] = 0$$

$$2 \varepsilon_{th} C_S \left(\frac{T_G}{100} \right)^4 + 2 \alpha_{Konv} T_G = \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_U}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right] + \alpha_{Konv} (T_R + T_U) .$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert die iterativ zu lösende Gleichung

$$10,206 \left(\frac{T_G}{100 \text{ K}} \right)^4 + 10 \frac{T_G}{\text{K}} = 3789,34$$

1. Annahme: $T_G = 300 \text{ K} \rightarrow 3826,7 \neq 3789,34$
 2. Annahme: $T_G = 298 \text{ K} \rightarrow 3784,9 \neq 3789,34$

Die lineare Interpolation liefert für die Glastemperatur

$$T_G = 298 \text{ K} + \frac{3789,34 - 3784,9}{3826,7 - 3784,9} (300 - 298) \text{ K} = 298,2 \text{ K}$$

Kontrolle $3789,0 \approx 3789,34$.

Die Temperatur der Glasscheibe $t_G = 25,05 \text{ °C}$ liegt etwa beim Mittelwert von Raum- und Umgebungstemperatur.

Die in den Raum eintretende Energiestromdichte setzt sich aus 3 Teilen zusammen (Transmission durch Sonnenstrahlung, Konvektion, thermische Strahlung der Glasscheibe).

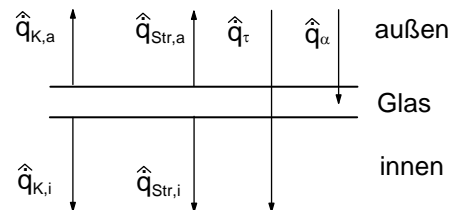
$$\hat{q} = \hat{q}_\tau + \hat{q}_{K,i} + \hat{q}_{Str,i}$$

$$\hat{q} = \tau_1 \hat{f}_S + \alpha_{Konv} (T_G - T_R) + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_G}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right] \\ = \left\{ 0,9 \cdot 500 + 5(298,2 - 293,15) + 0,9 \cdot 5,67 \left[\left(\frac{298,2}{100} \right)^4 - \left(\frac{293,15}{100} \right)^4 \right] \right\} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\hat{q} = (450 + 25,25 + 26,647) \text{ W/m}^2 = 501,9 \text{ W/m}^2.$$

Der größte Anteil (etwa 90%) der in den Raum eintretenden Energiestromdichte kommt durch die Sonnenstrahlung zustande und gelangt durch Transmission in den Raum.

Absorptionsglas



HJ.ZI.27022001.BildAufg202.dsf

Zusätzlich zu den Energieströmen, die bei klarem Glas vorliegen, ist die vom Absorptionsglas absorbierte Energiestromdichte zu berücksichtigen.

$$\hat{q}_\alpha = \alpha_2 \hat{f}_S = 0,5 \cdot 500 \text{ W/m}^2 = 250 \text{ W/m}^2$$

Die Temperatur der Glasscheibe berechnet sich mit der Energiebilanz für die Glasscheibe.

$$\hat{q}_\alpha = \hat{q}_{K,a} + \hat{q}_{K,i} + \hat{q}_{Str,a} + \hat{q}_{Str,i}$$

Einsetzen der Ausdrücke für \hat{q} und Umstellen liefert

$$2 \varepsilon_{th} C_S \left(\frac{T_G}{100} \right)^4 + 2 \alpha_{Konv} T_G = \alpha_f \hat{f}_S + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_U}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right] + \alpha_{Konv} (T_R + T_U)$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert die iterativ zu lösende Gleichung

$$10,206 \left(\frac{T_G}{100 \text{ K}} \right)^4 + 10 T_G = 4039,34$$

1. Annahme: $T_G = 310 \text{ K} \rightarrow 4042,54 \neq 4039,34$

2. Annahme: $T_G = 309 \text{ K} \rightarrow 4020,44 \neq 4039,34$

Eine lineare Interpolation liefert für die Glastemperatur

$$T_G = 309 \text{ K} + \frac{4039,34 - 4020,44}{4042,54 - 4020,44} (310 - 309) = 309,85 \text{ K}$$

Kontrolle $4039,22 \approx 4039,34$.

Die Glastemperatur liegt über der Umgebungstemperatur ($t_G = 36,7 \text{ }^\circ\text{C}$).

Die in den Raum eintretende Energiestromdichte setzt sich wiederum aus 3 Anteilen zusammen.

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \hat{q}_\tau + \hat{q}_{K,i} + \hat{q}_{Str,i} \\ &= \tau_2 \hat{f}_S + \alpha_{Konv} (T_G - T_R) + \varepsilon_{th} C_S \left[\left(\frac{T_G}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right] \\ &= \{0,4 \cdot 500 + 5(309,85 - 293,15) + 0,9 \cdot 5,67[3,0985^4 - 2,9315^4]\} \text{ W/ m}^2 \\ &= (200 + 83,5 + 93,5) \text{ W/ m}^2 = 377 \text{ W/ m}^2.\end{aligned}$$

Es tritt nur eine Verringerung der in den Raum eintretenden Energiestromdichte gegenüber klarem Glas auf 75% auf. Die durch Transmission in den Raum eintretende Energiestromdichte verringert sich zwar um mehr als die Hälfte, andererseits nimmt aber infolge der höheren sich einstellenden Glastemperatur der Wärmeeintrag durch Konvektion und thermische Strahlung um mehr als das 3-fache zu. Eine wirksame Verhinderung des Eintretens der Sonnenstrahlung in den Raum ist nur durch äußere Verschattungseinrichtungen oder gut reflektierendes Glas zu erreichen.

Lösung Aufgabe 4.5:

Gegeben:	Brennkammer	$B = 5 \text{ m}, H = 15 \text{ m}$
	Gas	$T_G = 1600 \text{ K}, p_{\text{CO}_2} = 0,13 \text{ bar}, p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,25 \text{ bar}$
		$p_{\text{ges}} = 1 \text{ bar}$
	Wand	$T_W = 750 \text{ K}, \varepsilon_W = 0,8$
	Staub	$B_{\text{St}} = 0,008 \text{ kg/m}^3, \rho_{\text{St}} = 2200 \text{ kg/m}^3$
		$d_K = 10^{-5} \text{ m}, \bar{Q}_{\text{abs}} = 0,2$

- Gesucht:** a) Wärmestrom durch Gasstrahlung \dot{Q}_{GW}
 b) Wärmestrom durch Gas- und Staubstrahlung $\dot{Q}_{\text{G+St,W}}$

a) gleichwertige Schichtdicke des Gaskörpers

$$L_{\text{gl}} = 0,9 \frac{4 V}{A} = 3,857 \text{ m}$$

$$V = 5 \cdot 5 \cdot 15 \text{ m}^3 = 375 \text{ m}^3 \quad \text{Volumen der Brennkammer}$$

$$A = \left((5+5) \cdot 2 \cdot 15 + 2 \cdot 5^2 \right) \text{ m}^2 = 350 \text{ m}^2 \quad \text{Oberfläche}$$

Die Ermittlung der Emissionsgrade erfolgt mit den Diagrammen aus dem Umdruck S.27ff.

- für Wasserdampf bei Gastemperatur

Mit $p_{\text{H}_2\text{O}} L_{\text{gl}} = 0,25 \text{ bar} \cdot 3,857 \text{ m} = 0,964 \text{ bar m}$ und $T_G = 1600 \text{ K}$ erhält man aus
 Bild 6 $\varepsilon'_{\text{H}_2\text{O}} = 0,25$

Mit $(p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{ges}}) / 2 \text{ bar} = (0,25 + 1) \text{ bar} / 2 \text{ bar} = 0,625$ erhält man für die Druckkorrektur aus

$$\text{Bild 7} \quad f_{p,\text{H}_2\text{O}} = 1,1.$$

Damit ergibt sich der korrigierte ε -Wert

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = f_{p,\text{H}_2\text{O}} \varepsilon'_{\text{H}_2\text{O}} = 1,1 \cdot 0,25 = 0,275 = \varepsilon_{\text{G,H}_2\text{O}} \quad (\text{da } p_{\text{ges}} = 1 \text{ bar})$$

- für Kohlendioxid bei Gastemperatur

Mit $p_{\text{CO}_2} L_{\text{gl}} = 0,13 \text{ bar} \cdot 3,857 \text{ m} = 0,501 \text{ bar m}$ und $T_G = 1600 \text{ K}$ erhält man aus

$$\text{Bild 8} \quad \varepsilon_{\text{CO}_2} = 0,15 = \varepsilon_{\text{G,CO}_2} \quad (\text{da } p_{\text{ges}} = 1 \text{ bar})$$

Es ist keine Druckkorrektur notwendig, da $p_{\text{ges}} = 1 \text{ bar}$ ist.

Die Ermittlung der Absorptionsgrade erfolgt ebenfalls mit den Diagrammen aus Umdruck S.27 ff.

- für Wasserdampf bei Wandtemperatur

$$\text{Mit } p_{\text{H}_2\text{O}} \frac{T_{\text{W}}}{T_{\text{G}}} L_{\text{gl}} = 0,25 \text{ bar } \frac{750 \text{ K}}{1600 \text{ K}} 3,857 \text{ m} = 0,452 \text{ bar m}$$

$$\text{und } T_{\text{W}} = 750 \text{ K} \text{ erhält man aus Bild 6 } \varepsilon'_{\text{GW,H}_2\text{O}} = 0,31.$$

Mit $(p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{ges}})/2 \text{ bar} = 0,625$ und $p_{\text{H}_2\text{O}} \frac{T_{\text{W}}}{T_{\text{G}}} L_{\text{gl}} = 0,425 \text{ bar m}$ erhält man aus Bild 7 den Wert für die Druckkorrektur $f_{\text{p,H}_2\text{O}} = 1,12$.

Damit ergibt sich der korrigierte ε -Wert

$$\varepsilon_{\text{GW,H}_2\text{O}} = f_{\text{p,H}_2\text{O}} \varepsilon'_{\text{GW,H}_2\text{O}} = 0,347$$

und damit der Absorptionsgrad

$$\alpha_{\text{GW,H}_2\text{O}} = \varepsilon_{\text{GW,H}_2\text{O}} \left(\frac{T_{\text{G}}}{T_{\text{W}}} \right)^{0,45} = 0,347 \left(\frac{1600}{750} \right)^{0,45} = 0,488.$$

- für Kohlendioxid bei Wandtemperatur

$$\text{Mit } p_{\text{CO}_2} \frac{T_{\text{W}}}{T_{\text{G}}} L_{\text{gl}} = 0,13 \text{ bar } \frac{750}{1600} 3,857 \text{ m} = 0,235 \text{ bar m} \text{ und } T_{\text{W}} = 750 \text{ K} \text{ erhält man aus Bild 8 } \varepsilon_{\text{GW,CO}_2} = 0,13$$

und für den Absorptionsgrad

$$\alpha_{\text{GW,CO}_2} = \varepsilon_{\text{GW,CO}_2} \left(\frac{T_{\text{G}}}{T_{\text{W}}} \right)^{0,65} = 0,13 \left(\frac{1600}{750} \right)^{0,65} = 0,213.$$

- Werte für Gasgemisch

Die Korrektur für die Überlagerung von 2 emittierenden Komponenten (Gemisch mit weiteren Gaskomponenten) erfolgt nach dem Umdruck S.31.

$$\text{Mit } (p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{CO}_2}) L_{\text{gl}} = (0,25 + 0,13) \text{ bar } 3,857 \text{ m} = 1,466 \text{ bar m}$$

$$\text{und } \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{CO}_2}} = \frac{0,25}{0,25 + 0,13} = 0,658$$

ergeben sich die folgenden Werte:

Bild 9c $\Delta\varepsilon_G = 0,054$ (für $t_G \geq 920 \text{ °C}$)

Bild 9 b $\Delta\varepsilon_W = 0,033$ (näherungsweise bei $T_W = 540 \text{ °C} + 273 \text{ K} = 813 \text{ K}$
abgelesen, richtig wäre bei 750 K)

$$\varepsilon_G = \varepsilon_{G,H_2O} + \varepsilon_{G,CO_2} - \Delta\varepsilon_G = 0,275 + 0,15 - 0,054 = 0,371$$

$$\alpha_{GW} = \alpha_{GW,H_2O} + \alpha_{GW,CO_2} - \Delta\varepsilon_W = 0,488 + 0,213 - 0,033 = 0,668$$

Der Wärmestrom vom Gas an die Wand berechnet sich nach dem Umdruck S.30 bzw. Skript S.105.

$$\dot{Q}_{GW} = \frac{A_G C_S \varepsilon_W \left[\varepsilon_G (T_G / 100)^4 - \alpha_{GW} (T_W / 100)^4 \right]}{\varepsilon_W + \alpha_{GW} - \varepsilon_W \alpha_{GW}}$$

$$\dot{Q}_{GW} = \frac{350 \text{ m}^2 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} \cdot 0,8 \left[0,371 \cdot 16^4 - 0,668 \cdot 7,5^4 \right] \text{ K}^4}{0,8 + 0,668 - 0,8 \cdot 0,668} = 37,75 \text{ MW}$$

Um sich eine Vorstellung von der Wirkung der Gasstrahlung machen zu können, kann der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient für die Gasstrahlung berechnet werden.

$$\alpha_{\text{Str}} = \frac{\dot{Q}_{GW}}{A_G (T_G - T_W)} = 126,9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

b) Die Staubstrahlung wird nach den Unterlagen im Skript S. 106 berechnet. Die spezifische Projektionsfläche ergibt sich mit der Querschnittsfläche einer Kugel dividiert durch die Masse der Kugel zu

$$A = \frac{\frac{\pi}{4} d_K^2}{\rho_{\text{St}} \frac{\pi}{6} d_K^3} = \frac{3}{2 \rho_{\text{St}} d_K} = \frac{3}{2 \cdot 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 10^{-5} \text{ m}} = 68,18 \text{ m}^2 / \text{kg}$$

Emissionsgrad für Staub (gültig für $\varepsilon_{\text{St}} < 0,4$ bzw. Argument $< 0,5$)

$$\varepsilon_{\text{St}} = 1 - \exp \left(- \bar{Q}_{\text{abs}} A B_{\text{St}} L_{\text{gl}} \right)$$

$$= 1 - \exp \left(- 0,2 \cdot 68,18 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \cdot 0,008 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 3,857 \text{ m} \right) = 0,3435$$

Überlagerung von Gas- und Staubstrahlung

$$\varepsilon_{\text{ges}} = 1 - (1 - \varepsilon_G)(1 - \varepsilon_{\text{St}}) = 1 - (1 - 0,371)(1 - 0,3435) = 0,587$$

$$\alpha_{\text{ges}} = 1 - (1 - \alpha_{\text{GW}})(1 - \varepsilon_{\text{St}}) = 1 - (1 - 0,668)(1 - 0,3435) = 0,782$$

Wärmestrom von Gas + Staub an die Wand

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{G+St,W}} &= \frac{A_G C_S \varepsilon_W \left[\varepsilon_{\text{ges}} (T_G / 100)^4 - \alpha_{\text{ges}} (T_W / 100)^4 \right]}{\varepsilon_W + \alpha_{\text{ges}} - \varepsilon_W \alpha_{\text{ges}}} \\ &= \frac{350 \text{ m}^2 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} \cdot 0,8 \left[0,587 \cdot 16^4 - 0,782 \cdot 7,5^4 \right] \text{ K}^4}{0,8 + 0,782 - 0,8 \cdot 0,782} = 59,75 \text{ MW} \end{aligned}$$

Durch Staub kommt ein 58%ig höherer Wärmestrom zustande.

Zusatz

Der äquivalente Wärmeübergangskoeffizient für Gas- und Staubstrahlung beträgt

$$\alpha_{\text{Str}} = \frac{\dot{Q}_{\text{G+St,W}}}{A (T_G - T_W)} = \frac{59,75 \cdot 10^6 \text{ W}}{350 \text{ m}^2 (1600 - 750) \text{ K}} = 200,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Dieser Wert ist deutlich höher als der durch Konvektion erreichbare Wärmeübergangskoeffizient ($\approx 5 - 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$).

Lösung Aufgabe 5.2:

Gegeben:	Abluft	$\dot{m}_1 = 2 \text{ kg/s}$, $t'_1 = 30 \text{ °C}$
	Frischlufte	$\dot{m}_2 = 2 \text{ kg/s}$, $t'_2 = 10 \text{ °C}$, $\bar{t}''_2 = 22 \text{ °C}$
	Regenerator	$n = 100\,000$ Röhrrchen, $U = 3 \text{ min}^{-1}$
	Röhrrchen	$d_i = 5 \text{ mm}$, $\delta = 1 \text{ mm}$, $\lambda_P = 0,14 \text{ W/(m K)}$, $\rho_P = 700 \text{ kg/m}^3$, $c_P = 1,2 \text{ kJ/(kg K)}$, $\alpha_i = 30 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
	Rotor	$d_A = 5 \text{ cm}$

- Gesucht:**
- Länge ℓ der Röhrrchen, Rotordurchmesser D
 - Änderung der Papirtemperatur Δt_s
 - Austrittstemperatur t''_2 bei $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 1 \text{ kg/s}$ und $\alpha_i = 25 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

- a) Stoffwerte für Luft bei $t_B = 20 \text{ °C}$ (Umdruck Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.45)

$$\rho_L = 1,188 \text{ kg/m}^3, \quad c_L = 1,007 \text{ kJ/(kg K)}$$

Die Zeit für die Aufwärm- bzw. Abkühlphase entspricht der halben Zeit für eine Umdrehung.

$$\Delta \tau_1 = \Delta \tau_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{U} = \frac{1}{2 \cdot 3 \text{ min}^{-1}} = 0,166 \text{ min} = 10 \text{ s}$$

Die Energiebilanz für die Frischlufte liefert die übertragene Wärme in einer Phase.

$$Q = \dot{C}_2 \Delta \tau_2 (\bar{t}''_2 - t'_2)$$

Mit dem Wärmekapazitätsstrom für die Frischlufte $\dot{C}_2 = \dot{m}_2 c_L$ ergibt sich

$$Q = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1,007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} (22 - 10) \text{ K} \cdot 10 \text{ s} = 241,68 \text{ kJ}.$$

Für die Berechnung des instationären Temperaturverlaufes der Röhrrchen wird der effektive Wärmedurchgangskoeffizient nach dem Verfahren von Schlünder verwendet. Mit dem Temperaturleitkoeffizienten für das Papier der Röhrrchen

$$a_P = \frac{\lambda_P}{\rho_P c_P} = \frac{0,14}{700 \cdot 1200} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1,667 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

berechnet sich die Fourier-Zahl für eine Phase zu

$$Fo = \frac{a_P \Delta\tau_i}{\delta^2} = \frac{1,667 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s} \cdot 10 \text{ s}}{0,001^2 \text{ m}^2} = 1,667.$$

Die Rohrwand wird als eben (wie Platte) betrachtet, wobei die äußere Rohroberfläche adiabat sein soll. Die charakteristische Abmessung beträgt deshalb $\ell = \delta$. Ein Wärmeübergang soll somit nur zwischen Rohrwand und Luftstrom in den Rohren stattfinden (nicht mit der Luft im Spalt zwischen den Rohren). Die effektiven Wärmeleitkoeffizienten betragen

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2 \lambda_P}{\sqrt{\pi Fo}} = \frac{2 \cdot 0,14 \text{ W}/(\text{m K})}{\sqrt{\pi \cdot 1,667}} = 0,1224 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff},\infty} = 2,467 \lambda_P = 0,3454 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},\infty}^2)^{1/2} = 0,3664 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

und der effektive Wärmedurchgangskoeffizient

$$k_{\text{eff},i} = \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda_{\text{eff}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{30} + \frac{0,001}{0,3664} \right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} = 27,73 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}.$$

Aus der Biot-Zahl

$$Bi = \frac{\alpha_i \delta}{\lambda_P} = \frac{30 \cdot 0,001}{0,14} = 0,214$$

folgt, dass im Papier nur eine geringe Temperaturdifferenz über der Wand vorliegt, da der Hauptwiderstand für den Wärmetransport auf der Außenseite beim Wärmeübergang auftritt.

Für die Wärmeübertragung in einer Phase gilt der Ansatz

$$Q = \frac{1}{4} k_{\text{eff},i} A_i (\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) \Delta t_m F.$$

Aus der Energiebilanz für die beiden Luftströme ergibt sich die mittlere Ablufttemperatur bei $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$.

$$\bar{t}_1'' = t_1' - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} (\bar{t}'' - t_2') = 30^\circ \text{C} - 1(22 - 10) \text{ K} = 18^\circ \text{C}$$

Da die Gleichung für die mittlere Temperaturdifferenz für einen Gegenströmer mit $\dot{C}_1 = \dot{C}_2$ einen unbestimmten Ausdruck liefert

$$\Delta t_m = \frac{t'_1 - \bar{t}_2'' - (\bar{t}_1'' - t'_2)}{\ln \frac{t'_1 - \bar{t}_2''}{\bar{t}_1'' - t'_2}} = \frac{0}{0},$$

wird mit der Temperaturdifferenz am Ein- bzw. Austritt gerechnet

$$\Delta t_m = \Delta t_0 = \Delta t_A = t'_1 - \bar{t}_2'' = 8 \text{ K}$$

In erster Annahme wird $F = 1$ gesetzt, da obiger Ansatz nur iterativ lösbar ist. Damit erhält man für die benötigte Fläche für eine Phase (halber Regenerator)

$$A_i = \frac{4 Q}{k_{\text{eff},i} 2 \Delta \tau_i \Delta t_m F} = \frac{4 \cdot 241,68 \text{ kJ}}{27,73 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 2 \cdot 10 \text{ s} \cdot 8 \text{ K} \cdot 1} = 217,9 \text{ m}^2$$

Die Länge der Röhren (Betrachtung des halben Regenerators) beträgt

$$\ell = \frac{A_i}{\pi d_i n/2} = \frac{217,9}{\pi \cdot 0,005 \cdot 50\,000} = 0,277 \text{ m}$$

Für die obigen und die nachfolgenden Rechnungen ist zu beachten, dass stets die Wärmeübertragung nur in einer Phase betrachtet wird und dafür nur der halbe Regenerator zur Verfügung steht. Zur Kontrolle muss der Korrekturfaktor F berechnet werden. Mit der Übertragungszahl für den halben Regenerator

$$N = \frac{k_{\text{eff},i} A_i}{\dot{C}_1} = \frac{27,73 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 217,9 \text{ m}^2}{2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1007 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 3,0$$

mit dem Wärmekapazitätsstrom für die Abluft $\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_L$,

der Übertragungszahl für die Speichermasse

$$N_S = \frac{k_{\text{eff},i} A_i \Delta \tau_i}{C_S} = \frac{27,73 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 217,9 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ s}}{219,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}} = 0,275$$

mit der Wärmekapazität der Speichermasse für einen halben Regenerator

$$C_S = c_P \rho_P \frac{\pi}{4} [(d_i + 2\delta)^2 - d_i^2] \ell \frac{n}{2}$$

$$= 1,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\pi}{4} [0,007^2 \text{ m}^2 - 0,005^2 \text{ m}^2] 0,277 \text{ m} \cdot 50\,000 = 219,3 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

wird

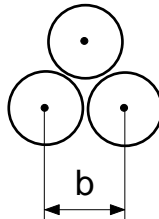
$$F = 1 - \frac{1}{N} (0,8 N_S - 3 \tanh(0,2 N_S)) = 0,981$$

Die Verwendung der Gleichung ist möglich, da $N_S/N < 0,5$ ist.
Damit verändert sich die Länge der Röhren auf

$$\ell = \frac{0,277 \text{ m}}{0,981} = 0,282 \text{ m} \quad \text{bzw.} \quad A_i = \frac{217,9 \text{ m}^2}{0,981} = 222,1 \text{ m}^2 .$$

Der Durchmesser des Rotors berechnet sich entsprechend der geometrischen Anordnung der Röhren. Die Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der benachbarten Rohre ergeben gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $b = d_i + 2\delta$. In einem Dreieck ist ein halbes Rohr (3 mal ein Sechstel von einem Rohr) und ein Zwischenraum zwischen den Rohren enthalten. Mit

der Fläche des Dreiecks $A_D = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$ berechnet sich die Gesamtfläche des Rotors einschließlich Fläche der Welle zu



HJ.ZI.26022001.BildAufg131.dsf

$$A_R = n \cdot 2 A_D + \frac{\pi}{4} d_A^2 = 100\,000 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} 0,007^2 \text{ m}^2 + \frac{\pi}{4} 0,05^2 \text{ m}^2 = 4,245 \text{ m}^2 .$$

Daraus ergibt sich der Rotordurchmesser zu $D = \sqrt{\frac{4 A_R}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,245 \text{ m}^2}{\pi}} = 2,325 \text{ m} .$

b) Aus der Energiebilanz für die Speichermasse (halber Regenerator bzw. eine Phase betrachtet)

$$Q = C_S \Delta t_S$$

ergibt sich die Temperaturänderung des Papiers

$$\Delta t_S = \frac{Q}{C_S} = \frac{241,68 \text{ kJ}}{219,3 \text{ kJ/K}} = 1,1 \text{ K}$$

Auf Grund der kurzen Schaltzeiten verändert sich die Temperatur des Papiers nur wenig.

c) In diesem Aufgabenteil handelt es sich um den Nachrechnungsfall für einen anderen Betriebspunkt. Da die Austrittstemperaturen unbekannt sind, muss mit der Betriebscharakteristik gerechnet werden. Es werden die beiden Parameter R und N benötigt (Verwendung des Index 1).

$$\bar{R}_1 = 1, \quad \bar{N}_1 = \frac{k_{\text{eff},i} A_i F}{2 \dot{C}_1}$$

Mit $\alpha_i = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ wird $k_{\text{eff},i} = 23,4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

Der Korrekturfaktor F muss ebenfalls neu berechnet werden.

$$N_S = \frac{23,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \cdot 222,1 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ s}}{219\,300 \frac{\text{J}}{\text{K}}} = 0,237$$

$$N = \frac{23,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \cdot 222,1 \text{ m}^2}{1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1007 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 5,16$$

$$F = 1 - \frac{1}{5,16} (0,8 \cdot 0,237 - 3 \tanh(0,2 \cdot 0,237)) = 0,991$$

Damit wird

$$\bar{N}_1 = \frac{23,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \cdot 222,1 \text{ m}^2 \cdot 0,991}{2 \cdot 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 1007 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 2,557$$

Da $R = 1$ ist, gilt für den Gegenströmer die Gleichung

$$\Phi_1 = \frac{\bar{N}_1}{1 + \bar{N}_1} = 0,7188 \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \Phi_1$$

Aus der Definition der Betriebscharakteristik Φ_2 ergibt sich die Austrittstemperatur der Frischluft zu

$$\bar{t}_2'' = t_2' + \Phi_2(t_1' - t_2') = 10 \text{ °C} + 0,715(30 - 10) \text{ K} = 24,3 \text{ °C}.$$

Im Teillastbereich erhöht sich die Austrittstemperatur der Frischluft bzw. verringert sich die Austrittstemperatur der Abluft.

Numerische Berechnung

Um die Temperatur $t(x, \tau)$ für die Speichermasse und den Fluidstrom im Regenerator zu erhalten, muss eine numerische Berechnung vorgenommen werden, z. B. mit dem Bilanzverfahren. Dazu wird der Regenerator in N-Abschnitte mit der Länge Δx eingeteilt. Für jeden Abschnitt gelten die folgenden Gleichungen (z. B. für Aufwärmphase)

Energiebilanz Abluft $Q_n = \dot{C}_1 (\bar{t}_{1,n} - t_{1,n+1}) \Delta \tau_k$

Energiebilanz Speichermasse $Q_n = C_S \frac{\Delta x}{L} (t_{S,n,k+1} - t_{S,n,k})$

Wärmeübertragung $Q_n = k_{\text{eff}} A \frac{\Delta x}{L} \Delta \tau_k \Delta t_m$

$$\Delta t_m = 0,5(\bar{t}_{1,n} + \bar{t}_{1,n+1}) - \bar{t}_{S,n} \text{ arithmetisches Mittel}$$

oder

$$\Delta t_m = \frac{\bar{t}_{1,n} - \bar{t}_{1,n+1}}{\ln \frac{\bar{t}_{S,n} - \bar{t}_{1,n}}{\bar{t}_{S,n} - \bar{t}_{1,n+1}}} \quad \text{logarithmisches Mittel}$$

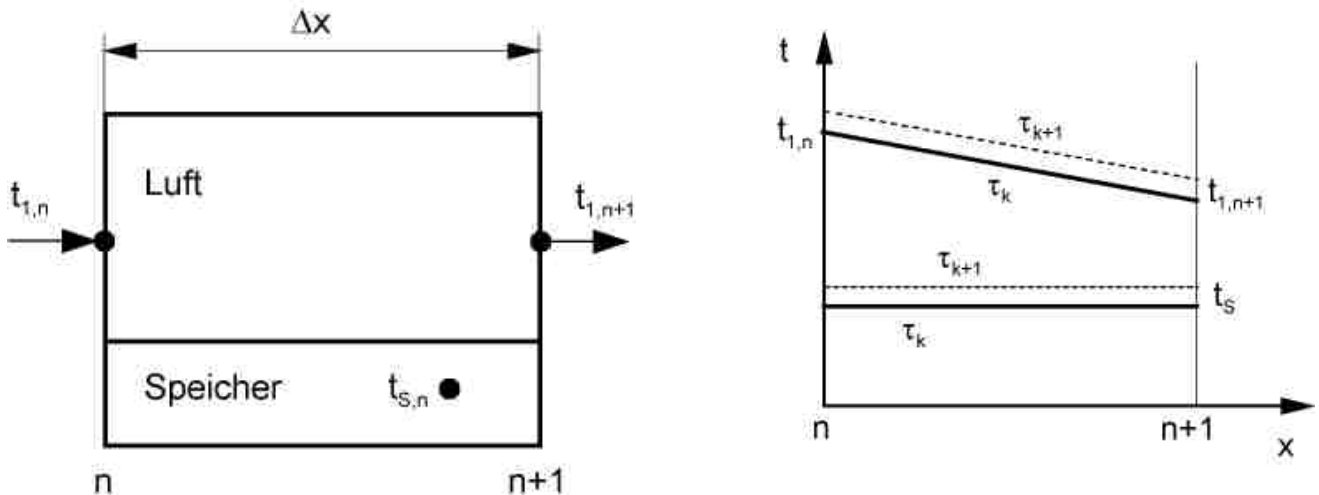
Für die Temperaturen \bar{t}_1 und \bar{t}_S werden vorteilhaft zeitlich gemittelte Werte verwendet, z. B.

$$\bar{t} = 0,5(t_k + t_{k+1})$$

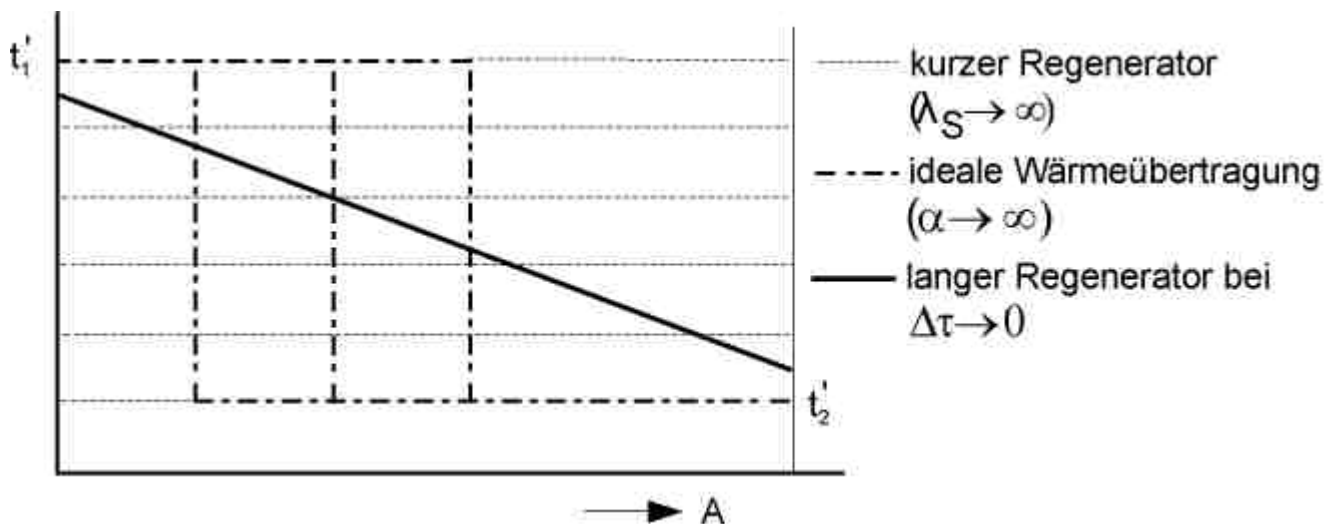
Das Gleichungssystem muss iterativ gelöst werden, wofür sich ein Excel-Programm anbietet. Für die Temperaturverteilung in der Speichermasse und in der Luft wird z. B. als Startwert eine lineare Verteilung angenommen. Das Gleichungssystem wird schrittweise über x und τ solange berechnet, bis sich keine Änderung mehr ergeben (implizites Verfahren). Um Konvergenz zu erreichen, müssen die berechneten Veränderungen bei den Temperaturen mit einem Unterrelaxationsfaktor gedämpft werden. Ist ein stabiles Ergebnis für die Aufwärmphase erreicht, wird anschließend die Abkühlphase berechnet. Um den eingeschwungenen Zustand für den Regenerator zu erreichen, müssen Aufwärm- und Abkühlphase nacheinander so oft berechnet werden, bis sich stets dieselben Temperaturen am ende der jeweiligen Phase ergeben (vgl. auch Aufg. 5.4). Je nach Parametern λ_S, α und $\Delta \tau$ lassen sich für den Regenerator verschiedene Grenzfälle berechnen. Der vorliegende Fall nähert sich dem idealen langen Regenerator, da nur geringe Temperaturände-

rungen der Speichermasse und eine fast lineare Temperaturverteilung für die Speichermasse längs des Regenerators auftraten. In vielen praktischen Anwendungen treten aber geschwungene Linien für die Temperaturverteilung der Speichermasse auf.

Temperaturverteilung in einen Volumenelement



Temperaturverlauf der Speichermasse für verschiedene Grenzfälle



Lösung Aufgabe 5.3:

Gegeben:	Wärmerohr	$d_i = 12 \text{ mm}, d_a = 15 \text{ mm}, L = 1 \text{ m}, L_H = L_K = 0,3 \text{ m}$
	Rippen	$H = 17,5 \text{ mm}, \delta_R = 1 \text{ mm}, \delta = 4 \text{ mm},$
		Kupfer $\lambda_{\text{Cu}} = 370 \text{ W/(m K)}$
	Zu- und Abluft	$t_Z = 16 \text{ }^\circ\text{C}, t_A = 24 \text{ }^\circ\text{C}, \alpha_a = 40 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

- Gesucht:**
- äquivalenter Wärmeübergangskoeffizient $\bar{\alpha}_a$ auf berippter Seite
 - Wärmestrom \dot{Q} für ein Wärmerohr
 - Massestrom \dot{m}_D im Wärmerohr und Druckverlust Δp
 - mittlerer Wärmeübergangskoeffizient α_i in Kühlzone
 - Temperaturabfall Δt_i im Wärmerohr
 - Temperaturabfall Δt_{Cu} in einem Vollstab aus Kupfer

a) Die Ermittlung des äquivalenten Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}_a$ für das berippte Rohr (Kreisrippe) erfolgt mit dem Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/ Teil Wärmeübertragung S.16.

Die Näherungsformel für den Rippenwirkungsgrad von Kreisrippen lautet

$$\eta_R = \frac{\tanh(m H (1 + 0,35 \ln R/r_a))}{m H (1 + 0,35 \ln R/r_a)}$$

Mit

$$R/r_a = \frac{r_a + H}{r_a} = \frac{7,5 \text{ mm} + 17,5 \text{ mm}}{7,5 \text{ mm}} = 3,33$$

und der Rippengröße (mit dem Umfang mit Wärmeübergang $U = 2 \cdot 2 \pi r$ (2 Seiten) und dem wärmeleitenden Querschnitt $A^* = 2 \pi r \delta_R$)

$$m = \frac{\alpha_a U}{\lambda_{\text{Cu}} A^*} = \sqrt{\frac{2 \alpha_a}{\lambda_{\text{Cu}} \delta_R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}{370 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot 0,001 \text{ m}}} = 14,7 \frac{1}{\text{m}}$$

ergibt sich für den Rippenwirkungsgrad $\eta_R = 0,9577$. Im vorliegenden Fall ist $mH = 0,257$ und $m r_a = 0,11$. Letzterer Wert ist kleiner als die untere Gültigkeitsgrenze für die verwendete Gleichung von $m r_a = 0,5$. Da jedoch $\eta_R > 0,5$ ist, kann die Gleichung angewendet werden. Für den äquivalenten Wärmeübergangskoeffizient (bezogen auf die unberippt gedachte Außenfläche der Heiz- bzw. Kühlzone) gilt

$$\bar{\alpha}_a = \alpha_a \left(\frac{A_U}{A} + \eta_R \frac{A_R}{A} \right) = 756 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

Hierbei ist A_U die unberippte Rohroberfläche (Fläche zwischen zwei Rippen)

$$A_U = \pi d_a (\delta - \delta_R) = \pi \cdot 0,015 \text{ m} (0,004 - 0,001) \text{ m} = 1,4137 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

A_R die Oberfläche einer Rippe

$$A_R = 2 \frac{\pi}{4} (D^2 - d_a^2) = \frac{\pi}{2} (0,05^2 - 0,015^2) \text{ m}^2 = 3,573 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

und A die Summe aus unberippter Rohroberfläche und Rippenfußfläche A_{RF}
(A entspricht unberippt gedachter Fläche)

$$A = A_U + A_{RF} = \pi d_a \delta = 1,885 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

b) Die Anzahl der Rippen in der Kühl- bzw. Heizzone beträgt

$$n = \frac{L_H}{\delta} = \frac{0,3}{0,004} = 75.$$

Der Widerstand für die Heiz- bzw. Kühlzone bei Annahme von $\alpha_i = \infty$ beträgt

$$R_k = \frac{1}{\pi L_H} \left[\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2 \lambda_{Cu}} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{1}{d_a \bar{\alpha}_a} \right] = 0,09388 \frac{\text{K}}{\text{W}}.$$

Der Wärmestrom von der Zuluft zur Abluft berechnet sich bei Vernachlässigung eines Transportwiderstandes im Wärmerohr nach dem Grundgesetz für die Wärmeübertragung

$$\dot{Q} = \frac{t_A - t_Z}{2 R_k} = \frac{24 - 16}{2 \cdot 0,09388} \text{ W} = 42,6 \text{ W}.$$

c) Der transportierte Massestrom im Wärmerohr berechnet sich aus der Energiebilanz

$$\dot{m}_D = \frac{\dot{Q}}{\Delta h_V} = \frac{42,6 \text{ W}}{2453,55 \text{ kJ/kg}} = 1,736 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$$

Δh_V aus Dampftafeln (Wagner, W.; Kruse, A.: Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf, Springer Verlag 1998).

Für den Druckverlust infolge Reibung für eine Dampfströmung im Rohr gilt

$$\Delta p_R = \zeta \frac{L_T}{d_i} \frac{\rho w_D^2}{2} .$$

Mit der Dampfdichte $\rho = 1/v''$ ($v'' = 57,761 \text{ m}^3/\text{kg}$ aus Dampftafel), dem mittleren Strömungsweg für die Dampfströmung

$$L_T = L - 0,5 (L_H + L_K) = 0,7 \text{ m}$$

der Dampfgeschwindigkeit

$$w_D = \frac{\dot{V}_D}{A_{C,i}} = \frac{\dot{m}_D v''}{\frac{\pi}{4} d_i^2} = \frac{1,736 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s} \cdot 57,761 \text{ m}^3/\text{kg}}{\frac{\pi}{4} 0,012^2 \text{ m}^2} = 8,867 \text{ m/s}$$

wird die Re-Zahl für die Dampfströmung

$$Re = \frac{w_D d_i}{v'' \eta''} = \frac{8,867 \text{ m/s} \cdot 0,012 \text{ m}}{57,761 \text{ m}^3/\text{kg} \cdot 9,73 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}} = 189,33 \text{ laminar} .$$

Mit dem Ansatz für den Reibungsbeiwert bei laminarer Strömung

$$\zeta = \frac{64}{Re}$$

wird der Reibungsdruckabfall im Wärmerohr

$$\Delta p_R = \frac{64 \cdot 0,7 \text{ m} \cdot 8,867^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{189,33 \cdot 0,012 \text{ m} \cdot 2 \cdot 57,761 \text{ m}^3/\text{kg}} = 13,42 \text{ Pa} .$$

Der Druckverlust infolge Beschleunigung beträgt

$$\Delta p_B = \frac{\rho}{2} w_D^2 = \frac{w_D^2}{2 v''} = \frac{8,867^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 57,761 \text{ m}^3/\text{kg}} = 0,681 \text{ Pa} .$$

Er wird vernachlässigt, da er sehr klein ist und z. T. in Kondensationszone zurückgewonnen wird.

Alle Stoffwerte wurden dem Buch von Wagner, W.; Kruse, A. entnommen.

d) Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient α_i in der Kühlzone berechnet sich mit den

Gleichungen für eine Filmkondensation.

Die Re-Zahl für die Filmströmung beträgt

$$\text{Re}_F = \frac{\dot{m}_F}{\eta_F \pi d_i} = \frac{1,736 \cdot 10^{-5}}{1002,7 \cdot 10^{-6} \pi 0,012} = 0,4593 \quad \text{laminar.}$$

Für die mittlere Nu^* - Zahl bei wellenfreier Filmströmung ($\text{Re} < 5,67$) und den Auslegungsfall gilt

$$\text{Nu}^* = 0,9245 \text{Re}_F^{-1/3} = 1,198$$

$$\alpha_i = \lambda \text{Nu}^* \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3} = 0,60 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot 1,198 \left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{1,004^2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 / \text{s}^2} \right)^{1/3} = 15320 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}).$$

Dieser Wert gilt auch für die Verdampfungszone, da bei diesen dünnen Filmen stets Oberflächenverdampfung auftritt (umgekehrte Richtung für Wärmetransport). Dabei muss aber vorausgesetzt werden, dass die Wand gleichmäßig benetzt ist, was aber in der Praxis nicht gegeben ist. Ein Blasensieden tritt auch wegen der geringen Übertemperatur der Wand gegenüber der Siedetemperatur ($(t_W - t_S) < 1 \text{ K}$) nicht auf. Die Stoffwerte wurden näherungsweise bei der mittleren Temperatur von $20 \text{ }^\circ\text{C}$ im Wärmerohr gebildet.

e) Der Temperaturabfall für Kondensation bzw. Verdampfung berechnet sich aus der Grundgleichung für die Wärmeübertragung

$$\Delta t_K = \Delta t_V = \frac{\dot{Q}}{\alpha_i \pi d_i L_K} = \frac{42,6 \text{ W}}{15320 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \pi 0,012 \text{ m } 0,3 \text{ m}} = 0,246 \text{ K.}$$

Weiterhin tritt ein Temperaturabfall infolge des Druckabfalls auf, der mit Hilfe der Siedelinie $t_S(p)$ ermittelt wird. Der Anstieg dt/dp wird mit 2 Stützstellen aus den Stoffwerttabellen gebildet.

$$\Delta t_R = \Delta p_R \frac{dt}{dp} = 13,44 \cdot 6,896 \cdot 10^{-3} \text{ K} = 0,0927 \text{ K}$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\Delta t}{\Delta p} = \frac{22 - 18}{2645 - 2065} \frac{\text{K}}{\text{Pa}} = 6,896 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{Pa}}.$$

Damit ergibt sich für den gesamten Temperaturabfall im Wärmerohr

$$\Delta t_{i,ges} = \Delta t_K + \Delta t_V + \Delta t_R = 2 \cdot 0,246 + 0,0927 \text{ K} = 0,585 \text{ K} .$$

Auf Grund dieses Temperaturabfalls verringert sich der übertragene Wärmestrom um

$$0,585/8 \cdot 100 \% = 7,3 \% \quad (\dot{Q} = 39,5 \text{ W}).$$

Da wegen geringer Luftanteile der Wärmeübergangskoeffizient α_i bei der Kondensation kleiner ist und wegen Nichtbenetzung der Wand α_i bei der Verdampfung ebenfalls kleiner ist, muss für $\Delta t_{i,ges}$ mit etwa 1 K für eine praktische Anwendung gerechnet werden.

f) Der Temperaturabfall für den Transport des oben berechneten Wärmestromes in einem Vollstab aus Kupfer berechnet sich aus der Grundgleichung für die eindimensionale Wärmeleitung in einer ebenen Wand.

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_{Cu}}{L_T} \frac{\pi}{4} d_a^2 \Delta t_{Cu}$$

$$\Delta t_{Cu} = \frac{4 L_T \dot{Q}}{\lambda_{Cu} \pi d_a^2} = \frac{4 \cdot 0,7 \text{ m} \cdot 42,6 \text{ W}}{370 \text{ W/(m K)} \pi \cdot 0,015^2 \text{ m}^2} = 456 \text{ K} .$$

Dieser sehr große notwendige Temperaturabfall in einem Kupferstab zeigt die hohe Effektivität des Wärmerohres.

Bei $\Delta t = 1 \text{ K}$ müsste der Stab einen Durchmesser von $d_a = 320 \text{ mm}$ haben, um den notwendigen Wärmestrom übertragen zu können.

Zusatz

Statt eines Gravitationswärmerohres in senkrechter Anordnung wie im vorliegenden Fall kann auch ein Rohr mit axialen Rillen in waagerechter Anordnung verwendet werden. Wenn z. B. $n_K = 37$ Rillen mit der Breite $b_K = 0,5 \text{ mm}$ und der Tiefe $h_K = 0,5 \text{ mm}$ vorgesehen werden, ergibt sich eine maximale Kapillardruckdifferenz von

$$\Delta p_{Kap,max} = \frac{2 \sigma \cos \theta}{R_{min}} = \frac{2 \cdot 72,74 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \cos 45^\circ}{0,0005 \text{ m}} = 205,7 \text{ Pa}$$

Die maximale Kapillardruckdifferenz tritt auf, wenn die Flüssigkeit in der Kapillare den kleinstmöglichen Radius aufweist. Nach VDI-Wärmeatlas, Abschnitt M1 kann $R_{min} = b_K$ gesetzt werden. Der Benetzungswinkel beträgt bei Wasser ca. $40 - 45^\circ$. Zusätzlich zu dem Reibungsdruckverlust der Dampfströmung muss jetzt noch der Reibungsdruckverlust für die Rückströmung der Flüssigkeit in den Kapillaren berechnet werden. Da dieser nur etwa 95 Pa beträgt (bei Annahme einer gefüllten Rille), wird bei den Druckverlusten der zur Verfügung stehende Wert

$\Delta p_{K_{ap,max}}$ nicht ausgeschöpft und der Massestromumlauf funktioniert. Da der Wärmeübergangskoeffizient für die Strömung in den Rillen mit etwa $2700 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (laminare Strömung im quadratischen Kanal) kleiner als bei d) ist, tritt ein größerer Temperaturabfall in der Heiz- und Kühlzone auf (etwa jeweils 1 K) und damit insgesamt eine kleinere Leistung des Wärmerohres (nur etwa 35 W).

Lösung Aufgabe 6.2:

Gegeben: Wassergefäß $b = 5 \text{ cm}$, $l = 40 \text{ cm}$, $t_W = 20 \text{ °C}$, $h = 5 \text{ cm}$
 Raumluft $t = 20 \text{ °C}$, $\varphi = 50\%$, $p = 750 \text{ Torr}$
 Diffusionskoeffizient $D_{12} = 0,097 \text{ m}^2 / \text{h}$

Gesucht: a) verdunstender Massestrom \dot{m}_D
 b) Zusammenhang zwischen p_D und ζ_D
 c) Differentialgleichung für Konzentrationsverlauf
 d) Partialdruckverlauf für Wasserdampf

a) Ermittlung der Partialdrücke des Wasserdampfes

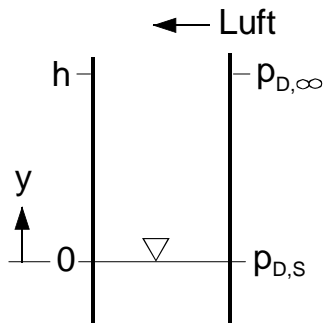
Definition der relativen Feuchte $\varphi = \frac{p_D}{p_{D,S}}$

Partialdruck des Dampfes im Sättigungszustand bei Temperatur t_W

$p_{D,S}(t_W = 20 \text{ °C}) = 0,023368 \text{ bar}$ aus Siedekurve

Partialdruck des Dampfes in der Außenströmung (Luft über Gefäß)

$$p_{D,\infty} = \varphi p_{D,S}(t) = 0,5 \cdot 0,023368 \text{ bar} = 0,011684 \text{ bar}$$

Berechnung des Massenstromes

Näherung wegen $p_D \ll p$ möglich!
 ($0,023368 \text{ bar} \ll 1 \text{ bar} = 750 \text{ Torr}$)

$$\frac{p_D}{p} \cdot 100\% = 2,3\%$$

Stefansches Gesetz für $p_D \ll p$:

$$\hat{m} = \frac{D_{12}}{h} \frac{1}{R_D T} (p_{D,S} - p_{D,\infty})$$

$R_D = 0,46 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ Gaskonstante für Wasserdampf

$$\hat{m} = \frac{0,097 \text{ m}^2 / \text{h} (0,023368 - 0,011684) \text{ bar} \cdot 10^5 \text{ N} / \text{m}^2 \cdot 1 \text{ kJ}}{0,05 \text{ m} \cdot 0,46 \text{ kJ}/(\text{kg K}) \cdot 293 \text{ K} \quad 1 \text{ bar} \cdot 10^3 \text{ Nm}}$$

$$\hat{m} = 0,0168 \text{ kg} / \text{m}^2 \text{h}$$

Massenstrom des Wasserdampfes

$$\dot{m}_D = \hat{m} \cdot A = 0,0168 \text{ kg/m}^2 \text{ h} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m} = 0,336 \text{ g/h}$$

Zur Vergrößerung des Massenstroms kann die Temperatur des Wassers erhöht oder die Oberfläche zur Verdunstung vergrößert (Rieselfilm, Saugpapier) werden. Diese o.g. Anordnung ist ohne Effekt, da \dot{m}_D viel zu klein ist.

b) Massenkonzentration des Dampfes

$$\zeta_D = \frac{m_D}{V} = \frac{p_D}{R_D T} = \rho_{P,D} \quad \rho_{P,D} \quad \text{Partialdichte des Dampfes}$$

ideales Gasgesetz

$$\zeta_{D,S} = \frac{0,023368 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{0,46 \text{ kJ/(kg K)} \cdot 293 \text{ K}} \frac{1 \text{ kJ}}{10^3 \text{ Nm}} = 0,0173 \text{ kg/m}^3$$

$$\zeta_{D,\infty} = \frac{0,011684 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{0,46 \text{ kJ/(kg K)} \cdot 293 \text{ K}} \frac{1 \text{ kJ}}{10^3 \text{ Nm}} = 0,00867 \text{ kg/m}^3$$

c) 2. Ficksches Gesetz (Annahme $\bar{c} = 0$, wegen sehr kleiner Diffusionsstromdichte gerechtfertigt)

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta_D}{\partial \tau}}_{= 0, \text{ da stationär}} = D_{12} \text{ div grad } \zeta_D$$

eindimensional

$$\rightarrow \frac{d^2 \zeta_D}{dy^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 p_D}{dy^2} = 0$$

d) Lösung der Differentialgleichung durch zweimalige Integration

$$\frac{d^2 \zeta_D}{dy^2} = 0, \quad \frac{d \zeta_D}{dy} = K_1, \quad \zeta_D = K_1 y + K_2$$

bzw. wenn der Partialdruck als Konzentrationsmaß verwendet wird

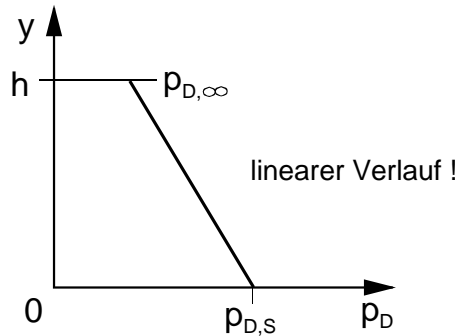
$$p_D = K_1 y + K_2$$

Bestimmung der Konstanten aus Randbedingung:

$$y = 0: \quad p_D = p_{D,S} \quad \rightarrow \quad K_2 = p_{D,S}$$

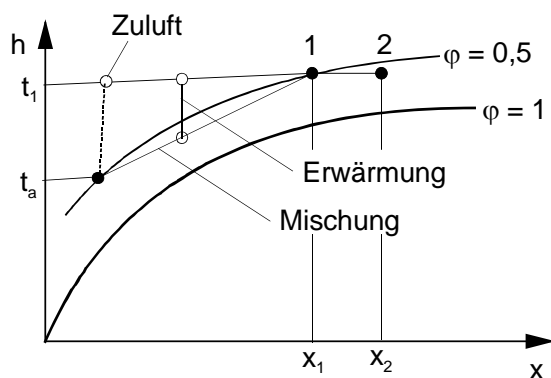
$$y = h: p_D = p_{D,\infty} \rightarrow p_{D,\infty} = K_1 h + p_{D,S}, \quad K_1 = \frac{p_{D,\infty} - p_{D,S}}{h}$$

$$p_D = p_{D,S} - (p_{D,S} - p_{D,\infty}) \frac{y}{h}$$



Feuchteänderung im Raum

Die Wirkung der Luftbefeuchtung soll abschließend an einem gewählten Beispiel diskutiert werden. Das Ziel bei der Luftbefeuchtung besteht darin, die Luftfeuchte im Raum bei einem konstanten Wert (z. B. $\varphi = 0,5$) zu halten, obwohl im Winter durch die Lüftung kalte und trockene Luft in den Raum eintritt und sich infolge der Mischung die Luftfeuchte verringert. Die Zuluft kann zuerst erwärmt (Zustandsänderung bei $x = \text{const}$) und dann mit der Raumluft gemischt werden oder zuerst erfolgt gedanklich die Mischung und dann die Erwärmung. Damit nach der Mischung der Raumluftzustand 1 vorliegt, muss die Raumluft befeuchtet werden (z. B. auf Zustand 2) oder die Zuluft muss befeuchtet werden (z. B. auf Isotherme bis Zustand 1).



Berechnung des Wassergehaltes für den Raumluftzustand

$$t_1 = 20 \text{ °C}, \quad \varphi_1 = 0,5$$

$$x_1 = 0,622 \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}$$

$$x_1 = \frac{0,622 \cdot 0,5 \cdot 0,023368}{1 - 0,5 \cdot 0,023368}$$

$$x_1 = 7,353 \text{ g/kg trockene Luft}$$

Bei Annahme $t = \text{const}$ im Raum und $\dot{m}_D = 13,39 \text{ g/h}$ (Wert ergibt sich bei gefülltem Gefäß und Luftstrom über dem Gefäß mit $\alpha = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$) sowie einer Wassertemperatur von $t_W = 40 \text{ °C}$) und einem Raumvolumen von $V_L = 50 \text{ m}^3$ ergibt sich eine Feuchteänderung pro Stunde

$$\Delta x = \frac{\dot{m}_D}{\rho_L V_L} \Delta \tau = \frac{13,39 \text{ g/h} \cdot 1 \text{ h}}{1,188 \text{ kg/m}^3 \cdot 50 \text{ m}^3} = 0,225 \text{ g/kg trockene Luft}$$

Mit der Befeuchtung muss die Zuluft auf den Raumzustand gebracht werden. Bei einem Außenluftzustand von $t_a = 0^\circ\text{C}$ und $\varphi_a = 0,5$ ist $x_{\text{Zuluft}} = 1,9 \text{ g/kg}$. Bei einem Luftwechsel von $0,3/\text{h}$ ist der Bedarf an Feuchte

$$\begin{aligned} \dot{m}_{D,\text{Bedarf}} &= \frac{0,3}{\text{h}} \rho_L V_L (x_1 - x_{\text{Zuluft}}) \\ &= \frac{0,3}{\text{h}} 1,188 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 50 \text{ m}^3 (7,353 - 1,9) \frac{\text{g}}{\text{kg}} = 97,17 \frac{\text{g}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Es wird eine deutlich größere verdunstende Wassermenge benötigt als im günstigsten Fall von dem Wassergefäß geliefert werden kann. Es sind deshalb Wassersprüher einzusetzen. Bei genauerer Bilanzierung sind natürlich auch weitere Feuchtequellen (Blumen, Menschen, Kochen) zu berücksichtigen.

Lösung Aufgabe 6.3:

Gegeben: feuchte Gewebbahn $b = 1 \text{ m}$, $a = 0,05 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$, $t_W = 27 \text{ °C}$
Luft $w = 2 \text{ m/s}$, $x = 10 \text{ g/kg}$, $t_L = 60 \text{ °C}$, $p = 1 \text{ bar}$

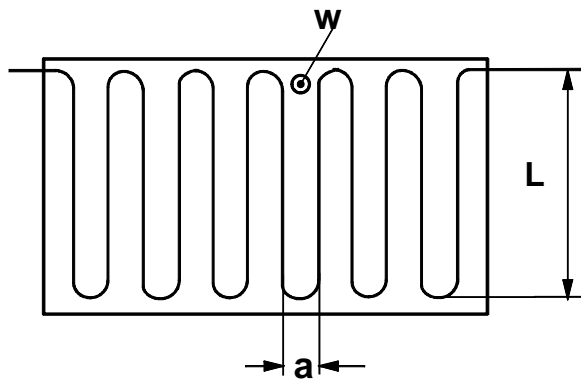
Gesucht: a) Stoffübergangskoeffizient β
b) verdunstende Massstromdichte \hat{m}_d
c) Änderung des Wassergehaltes Δx der Luft
d) stationäre Temperatur t_K für Gewebbahn

a) Stoffwerte für Luft bei $t_L = 60 \text{ °C}$
(Umdruck TTI/Wärmeübertragung S.45)

$$\rho_L = 1,045 \text{ kg/m}^3, \quad c_{p,L} = 1,009 \text{ kJ/kg K},$$

$$\lambda_L = 0,0286 \text{ W/m K}, \quad \nu_L = 19,27 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr}_L = 0,71$$

- Geometrische Anordnung



gleichwertiger Durchmesser

$$d_{gl} = \frac{4 A}{U}$$

$$= \frac{4 \cdot 1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m}}{2 \cdot 1 \text{ m} + 0,05 \text{ m}} = 0,095$$

Im weiteren wird mit dem Wert für parallele Platten $d_{gl} = 2a = 0,1 \text{ m}$ gerechnet.

- Berechnung des Stoffübergangskoeffizienten nach einer Analogiebeziehung

$$\text{Re} = \frac{w d_{gl}}{\nu_L} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}}{19,27 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,038 \cdot 10^4 \quad \text{turbulente Strömung}$$

Aus dem (Umdruck TTI/Wärmeübertragung S.40) kann für den Wärmeübergang bei einer turbulenten Strömung im Rohr die folgende Beziehung entnommen werden. Für die Rohrlänge L ist hier die Breite b der Gewebbahn zu setzen (Länge des Strömungskanals). Die Gleichung für eine turbulente Rohrströmung gilt auch für eine turbulente Kanalströmung, wenn mit dem gleichwertigen Durchmesser gearbeitet wird.

$$\text{Nu} = 0,0235 \left(\text{Re}^{0,8} - 230 \right) \left(1 + \left(\frac{d_{gl}}{b} \right)^{2/3} \right) \left(1,8 \text{ Pr}^{0,3} - 0,8 \right) \text{K}_T$$

gültig für $0,6 \leq Pr \leq 10^3$, $2300 < Re \leq 10^6$, $L/d_{gl} > 1$

Bezugstemperatur für Stoffwerte $t_{F,m} = t_L = 60^\circ\text{C}$

Die analoge Gleichung für den Stoffübertragung lautet nach Ersetzen von $Nu \rightarrow Sh$ und $Pr \rightarrow Sc$

$$Sh = 0,0235 \left(Re^{0,8} - 230 \right) \left(1 + \left(\frac{d_{gl}}{b} \right)^{2/3} \right) \left(1,8 Sc^{0,3} - 0,8 \right) K_T$$

Schmidt-Zahl

$$Sc = \frac{v_L}{D_{DL}} = \frac{19,27 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{3,346 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 0,576$$

Die Schmidt-Zahl liegt nur wenig unter der Gültigkeitsgrenze von 0,6, so dass noch mit obiger Gleichung gerechnet werden kann.

Diffusionskoeffizient (Wasserdampf in Luft)

$$D_{DL} = 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{p} \left(\frac{T}{273 \text{ K}} \right)^{1,81} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$= 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \left(\frac{333 \text{ K}}{273 \text{ K}} \right)^{1,81} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 3,346 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Sherwood-Zahl

$$Sh = 0,0235 \left((1,038 \cdot 10^4)^{0,8} - 230 \right) \left(1 + \left(\frac{0,1}{1} \right)^{2/3} \right) \left(1,8 \cdot 0,576^{0,3} - 0,8 \right) \cdot 1 = 29,06$$

$K_T = 1$, da Gasströmung

Stoffübergangskoeffizient

$$\beta = Sh \frac{D_{DL}}{d_{gl}} = 29,06 \frac{3,346 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{0,1 \text{ m}} = 9,72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 35,0 \text{ m/h}$$

- Berechnung des Stoffübergangskoeffizienten nach Lewis-Beziehung

Zuerst wird aus einer Nusselt-Gleichung der Wärmeübergangskoeffizient berechnet.

$$\text{Nu} = 0,0235 \left((1,038 \cdot 10^4)^{0,8} - 230 \right) \left(1 + \left(\frac{0,1}{1} \right)^{2/3} \right) (1,8 \cdot 0,71^{0,3} - 0,8) = 33,03$$

$$\alpha = \text{Nu} \frac{\lambda_L}{d_{gl}} = 33,03 \frac{0,0286 \text{ W/(m K)}}{0,1 \text{ m}} = 9,446 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Lewis-Beziehung

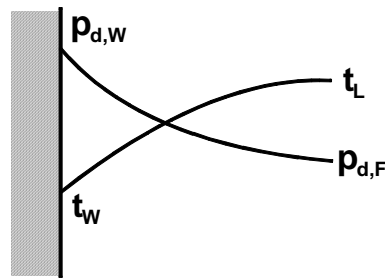
$$\beta = \frac{\alpha}{\rho_L c_{p,L}} = \frac{9,446 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}}{1,045 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1009 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 8,96 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 32,3 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Es ergibt sich für den Stoffübergangskoeffizient nach der Lewis-Beziehung ein kleinerer Wert als nach der Sh-Gleichung (Fehler – 7,9%).

b) Für die verdunstende Massestromdichte gilt der Ansatz

$$\hat{m}_d = \beta (\zeta_{d,W} - \zeta_{d,F})$$

$$= \frac{\beta}{R_d T} (p_{d,W} - p_{d,F})$$



Partialdruck des Dampfes an Oberfläche = Sättigungsdruck bei Temperatur t_w

$$p_{d,W} = p_S(t_w) = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_w}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 3563 \text{ Pa}$$

Partialdruck des Dampfes im Luftstrom (p ist Gesamtdruck, hier $p = p_L = 1 \text{ bar}$)

$$p_{d,F} = \frac{x}{0,622 + x} p = \frac{0,01}{0,622 + 0,01} 1 \text{ bar} = 0,0158 \text{ bar} = 1580 \text{ Pa}$$

verdunstende Massestromdichte (mit 2. Ausdruck der obigen Gl.)

$$\hat{m}_d = \frac{9,72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{461,5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 317,15 \text{ K}} (3563 - 1580) \text{ Pa} = 1,3175 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(s m}^2\text{)}$$

$$R_d = 461,5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, T \approx 0,5 (T_L + T_W) = 317,15 \text{ K}$$

Da keine isotherme Verdunstung vorliegt, wird näherungsweise mit der mittleren Grenzschichttemperatur gerechnet.

Die Berechnung der verdunstenden Massestromdichte kann auch nach dem vereinfachten Verdunstungsgesetz erfolgen.

$$\hat{m}_d = \sigma (x_W - x_F) = \frac{\alpha}{c_{p,L}} (x_W - x_F)$$

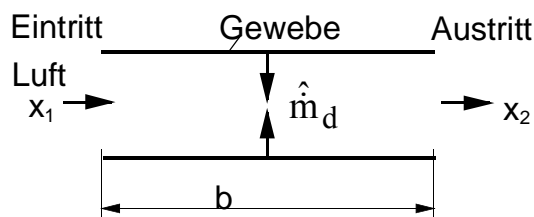
$$\hat{m}_d = \frac{9,446 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}{1009 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} (0,02298 - 0,01) = 1,215 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{s m}^2}$$

mit dem Wassergehalt an der Phasengrenze

$$x_W = x_S = 0,622 \frac{p_S(t_W)}{p - p_S(t_W)} = 0,622 \frac{3563 \text{ Pa}}{10^5 \text{ Pa} - 3563 \text{ Pa}} = 0,02298$$

Der Fehler für \hat{m}_d bei der Rechnung nach dem vereinfachten Verdunstungsgesetz beträgt -7,8%.

c) Die Änderung des Wassergehaltes der Luft ergibt sich aus einer Massebilanz für die Komponente Wasser in der Luft.



$$\hat{m}_{d,1} + \hat{m}_d A_W = \hat{m}_{d,2}$$

Mit der Definition für den Wassergehalt $x = \frac{m_d}{m_L} = \frac{\hat{m}_d}{\dot{m}_L}$ ergibt sich

$$x_1 \hat{m}_L + \hat{m}_d A_W = x_2 \dot{m}_L$$

bzw. für die Änderung des Wassergehaltes

$$x_2 - x_1 = \frac{\hat{m}_d A_W}{\dot{m}_L}$$

Der trockene Luftmassenstrom \dot{m}_L berechnet sich aus der Kontinuitätsgleichung und dem Zusammenhang mit dem feuchten Luftmassenstrom \dot{m}_f (gegebener Luftzustand) zu

$$\dot{m}_L = \frac{\dot{m}_f}{1+x} = \frac{\rho_f w a L}{1+x} = \frac{1,039 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \text{ m/s} \cdot 0,05 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{1+0,01} = 0,10287 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

mit der Dichte der feuchten Luft (vgl. Umdruck S.39)

$$\rho_f = \frac{p}{R_L T} \frac{1+x}{1+1,61 x} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{287,2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 333 \text{ K}} \frac{1+0,01}{1+1,61 \cdot 0,01} = 1,039 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Bei der Berechnung der Stoffübertragungsfläche A_W ist zu beachten, dass 2 Kanaloberflächen vorliegen.

$$A_W = 2bL = 2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$$

Damit wird

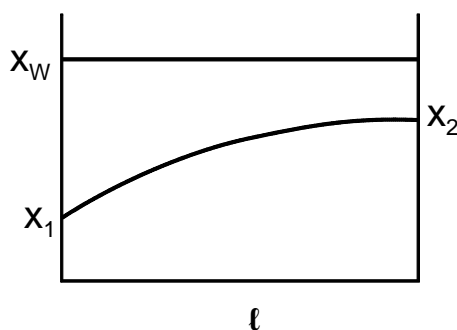
$$x_2 - x_1 = \frac{1,3175 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s} \cdot 2 \text{ m}^2}{0,10287 \text{ kg/s}} = 2,561 \cdot 10^{-3}$$

bzw. Wassergehalt am Ein- und Austritt

$$x_1 = x - \frac{x_2 - x_1}{2} = 0,008719$$

$$x_2 = x + \frac{x_2 - x_1}{2} = 0,011281$$

Bei der obigen Rechnung wurde mit arithmetischen Mittelwerten gerechnet. Bei der korrekten Rechnung muss das logarithmische Mittel verwendet werden. Mit den obigen Ergebnissen ergibt sich hierfür



$$\Delta x_m = \frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_W - x_1}{x_W - x_2}} = 0,01293$$

Bei der Näherung (arithmetisches Mittel) wurde mit

$$\Delta x_m = x_W - 0,5 (x_2 + x_1) = 0,01298$$

gerechnet (Fehler 0,4%). Der Fehler ist klein, da x viel kleiner als x_W ist und sich nur wenig ändert.

Wenn der Eintrittszustand $x_1, t_{L,1}$ gegeben ist, ist eine iterative Rechnung erforderlich, wenn auch die Stoffwerte bei mittleren Bedingungen ermittelt werden sollen.

Wenn der Wassergehalt x_1 am Eintritt gegeben ist, von konstanten Stoffwerten ausgegangen wird und der Wassergehalt x_2 am Austritt gesucht wird, führt folgender Lösungsweg zum Ziel (analog zur wärmetechnischen Berechnung eines Kondensators). Die verdunstende Massstromdichte berechnet sich aus der Grundgleichung für die Stoffübertragung bzw. aus der Massebilanz für den Wasserdampf zu

$$\hat{m}_d = \sigma \Delta x_m = \dot{m}_L (x_2 - x_1) \frac{1}{A_W} .$$

Mit der mittleren logarithmischen Triebkraft für den Stoffübergang

$$\Delta x_m = \frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_W - x_1}{x_W - x_2}}$$

erhält man nach Einsetzen, Kürzen, Umformen

$$\ln \frac{x_W - x_1}{x_W - x_2} = \frac{\sigma A_W}{\dot{m}_L} \rightarrow \frac{x_W - x_1}{x_W - x_2} = \exp\left(\frac{\sigma A_W}{\dot{m}_L}\right)$$

den Wassergehalt der Luft am Austritt

$$x_2 = x_W - \frac{x_W - x_1}{\exp\left(\frac{\sigma A_W}{\dot{m}_L}\right)}$$

Da sich im vorliegenden Beispiel der Wassergehalt der Luft nur wenig ändert, könnte die Luft mehrfach durch den Kanal geführt werden, um Energie für die Lufterwärmung zu sparen.

- d) Der übertragene Wärmestrom von der Luft an die Gewebbahn berechnet sich bei ($t_L > t_W$) zu

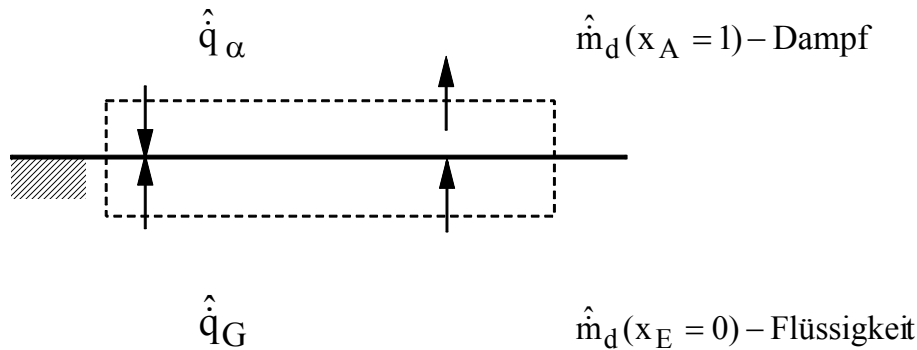
$$\hat{q}_\alpha = \alpha(t_L - t_W) = 9,446 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (60 - 27) \text{K} = 311,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Die zur Verdunstung erforderliche Wärme pro m^2 Gewebbahn beträgt

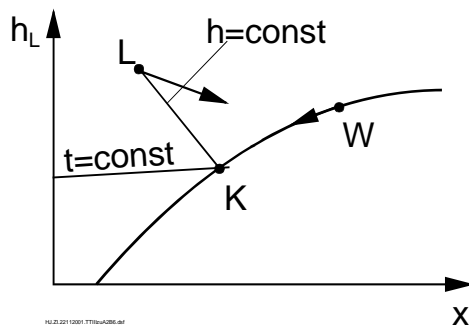
$$\hat{q}_V = \hat{m}_d \Delta h_V = 1,215 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 2439,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 296,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Verdampfungsenthalpie Δh_V bei der Temperatur des Gewebes (aus Dampftafel oder mit Gl. aus Umdruck S.39)

$$\Delta h_V = \Delta h_{V,1} \left(\frac{1 - T_2^*}{1 - T_1^*} \right)^{1/3} = 2501 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \left(\frac{1 - 300,15/647,14}{1 - 273,16/647,14} \right)^{1/3} = 2439,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



Bei der sich einstellenden Gleichgewichtstemperatur (= Kühlgrenztemperatur) wird die gesamte zur Verdunstung benötigte Energie von der Luft geliefert. Da im vorliegenden Fall $\hat{q}_\alpha \approx \hat{q}_V$ ist (Abweichung 5%) ist etwa die Kühlgrenztemperatur erreicht. Die Kühlgrenztemperatur kann sehr schnell aus dem h,x -Diagramm ermittelt werden.



Zur Lösung im h,x -Diagramm wird eine adiabatische Zustandsänderung eingetragen ($h = \text{const}$), die vom Luftzustand L zur Kühlgrenze K auf der Sättigungslinie führt, wo die zugehörige Temperatur abgelesen wird. Wenn anfangs die Gewebbahn eine höhere Temperatur (Punkt W auf Sättigungslinie) hat, kühlt sie sich schnell bis t_K ab (Punkt W wandert auf Sättigungslinie zu Punkt K).

Die rechnerische Ermittlung liefert für die Enthalpie der feuchten Luft

$$\begin{aligned} h_f &= 1,006 t_L / ^\circ\text{C} + x (2500 + 1,86 t_L / ^\circ\text{C}) \\ &= 1,006 \cdot 60 + 0,01(2500 + 1,86 \cdot 60) = 86,476 \frac{\text{kJ}}{\text{kg trockene Luft}} \end{aligned}$$

Für die Enthalpie bei Kühlgrenztemperatur t_K gilt

$$h_K = 1,006 t_K / ^\circ\text{C} + x_K (2500 + 1,86 t_K / ^\circ\text{C})$$

mit

$$x_K = 0,622 \frac{p_S(t_K)}{p - p_S(t_K)}$$

und

$$p_S(t_K) = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_K}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02}$$

Es gilt $h_f = h_K$. Eine iterative Lösung der obigen Gleichungen mit einem Excel-Programm liefert $t_K = 27,15 \text{ °C}$.

In analoger Weise kann auch aus der Beziehung $\hat{q}_\alpha \approx \hat{q}_V$ mit einem Excel-Programm iterativ die Kühlgrenztemperatur ermittelt werden. Hierbei ist auch $\hat{m}_d(t_K)$ und $\Delta h_V(t_K)$ zu berechnen. Bei Verwendung des Lewisschen Gesetzes für die Berechnung von \hat{m}_d ergibt sich $t_K = 27,37 \text{ °C}$ und bei Verwendung des Stoffübergangsgesetzes mit β erhält man $t_K = 26,77 \text{ °C}$. Die Abweichungen zwischen diesen 3 Ergebnissen kommen durch die verwendeten vereinfachten Näherungsgleichungen zustande.

Mit dem Luftmassenstrom durch einen Spalt ergibt sich aus der Energiebilanz für den Luftstrom die Abkühlung der Luft zu

$$\Delta t_L = \frac{2 \text{ L b } \hat{q}_\alpha}{c_{p,L} \dot{m}_f} = \frac{2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 311,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{1009 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 0,1039 \frac{\text{kg}}{\text{s}}} = 5,95 \text{ K} .$$

Die Luft kühlt sich ab und wird befeuchtet.

Lösung Aufgabe 6.4:

Gegeben: Wasserfläche mit $L \times B = 50 \text{ m} \times 200 \text{ m}$, $t_W = 20 \text{ °C}$
Luft $w = 5 \text{ m/s}$, $t_L = 20 \text{ °C}$, $\varphi = 0,4$ $p = 1 \text{ bar}$

Gesucht: a) verdunstender Massestrom \dot{m}_W
b) $\dot{m}_W / \dot{m}_{\text{ges}}$, Spiegelabsenkung Δh

a) Es liegt der Fall des Stoffübergangs bei einer überströmten Platte vor. Die verdunstende Massestromdichte wird näherungsweise mit dem vereinfachten Verdunstungsgesetz berechnet.

$$\hat{m}_W = \sigma (x_S - x) = \frac{\alpha_L}{c_{p,L}} (x_S - x)$$

Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten α_L

Stoffwerte für trockene Luft (für 20 °C):

$$\nu = 15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,02569 \text{ W}/(\text{m K}), \quad \text{Pr} = 0,7148, \quad c_{p,L} = 1,007 \text{ kJ}/(\text{kg K})$$

Re-Zahl für Plattenüberströmung

$$\text{Re} = \frac{w \cdot L}{\nu} = \frac{5 \text{ m/s} \cdot 50 \text{ m}}{15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,628 \cdot 10^7 > \text{Re}_{\text{kr}} \quad \text{turbulent} \left(\text{Re}_{\text{kr}} \approx 5 \cdot 10^5 \right)$$

Es wurde die kurze Länge als Bezugslänge gewählt, da damit ein größerer Wärmeübergangskoeffizient berechnet wird.

turbulente Strömung längs einer Platte

$$\text{Nu} = 0,037 \text{ Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,43} = 0,037 \cdot (1,63 \cdot 10^7)^{0,8} \cdot 0,7148^{0,43} = 18835$$

Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_L = \text{Nu} \frac{\lambda}{L} = 18835 \frac{0,02569 \text{ W}/(\text{m K})}{50 \text{ m}} = 9,68 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

Ermittlung des verdunstenden Massestromes

Sättigungsdruck des Dampfes an Wasseroberfläche

$$p_{d,S}(t_W) = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_W}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{20 \text{ °C}}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 2338,2 \text{ Pa}$$

Wassergehalt des Dampfes an Wasseroberfläche

$$x_S = 0,622 \frac{p_{d,S}}{p - p_{d,S}} = 0,622 \frac{2338,2 \text{ Pa}}{10^5 \text{ Pa} - 2338,2 \text{ Pa}} = 0,014892$$

Wassergehalt in der Luft (mit $p_{d,S}(t_L) = p_{d,S}(t_W)$)

$$x = 0,622 \frac{\varphi p_{d,S}}{p - \varphi p_{d,S}} = 0,622 \frac{0,4 \cdot 2338,2 \text{ Pa}}{(1 - 0,4 \cdot 2338,2) \text{ Pa}} = 0,005872 \frac{\text{kg W}}{\text{kg L}}$$

Verdunstende Massestromdichte

$$\hat{m}_W = \frac{9,68 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})}{1007 \text{ J}/(\text{kg K})} (0,014892 - 0,005872) = 8,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

Verdunstender Massestrom

$$\dot{m}_W = \hat{m}_W \cdot A = 8,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \cdot 50 \text{ m} \cdot 200 \text{ m} = 0,867 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 74910 \text{ kg/Tag}.$$

b) Anteil des verdunstenden Wassers am umgewälzten Massestrom

$$\frac{\dot{m}_W}{\dot{m}_{\text{ges}}} = \frac{0,867 \text{ kg/s}}{10^4 \text{ kg/s}} \cdot 100\% = 8,67 \cdot 10^{-3} \%$$

Die verdunstende Wassermenge stellt einen vernachlässigbaren Verlust für die Energieumformung dar.

Spiegelabsenkung im Oberbecken bei $\dot{m}_{\text{ges}} = 0$:

$$\Delta h = \frac{\dot{V}_{\text{Verd}}}{A} = \frac{\dot{m}_W}{\rho_W A} = \frac{0,867 \text{ kg/s}}{998,3 \text{ kg/m}^3 \cdot 50 \text{ m} \cdot 200 \text{ m}} = 8,68 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,5 \frac{\text{mm}}{\text{Tag}}$$

Die Spiegelabsenkung ist merklich, wenn mehrere Tage betrachtet werden.

Als Beispiel kann die Austrocknung von Seen in warmen Klimazonen genannt werden, wenn über längere Zeit kein Zufluss vorliegt. Bei höherer Wassertemperatur nimmt die Verdunstung stark zu (bei $t_W = t_L = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ ist Spiegelabsenkung fast doppelt so groß).

Lösung Aufgabe 6.6:

Gegeben: Ventilator-Kühlturm
 Kühlwasser $\dot{m}_W = 15 \text{ kg/s}$, $t_{W,1} = 31 \text{ °C}$, $t_{W,2} = 26 \text{ °C}$
 Luft $\dot{V}_L = 6,1 \text{ m}^3/\text{s}$, $t_{L,1} = 30 \text{ °C}$, $\phi_1 = 31\%$
 $\alpha_L = 30 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

Gesucht: a) Leistung \dot{Q} , Kühlgrenztemperatur $t_{K,1}$
 b) Austauschfläche A
 c) Zustandsverlauf der Luft
 d) Wasseraustrittstemperatur $t_{W,2}^*$ bei $\dot{m}_W/2$

a) Die Leistung des Kühlturms ergibt sich aus der Energiebilanz für das Kühlwasser.

$$\dot{Q} = \dot{m}_W c_{pW} (t_{W,1} - t_{W,2}) = 15 \frac{\text{kg}}{\text{s}} 4,183 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} (31 - 26)\text{K} = 313,7 \text{ kW}$$

Die Kühlgrenztemperatur für den Lufteintrittszustand kann nach 3 Möglichkeiten ermittelt werden:

- aus h,x-Diagramm
 Das Ablesen aus dem h,x-Diagramm (Linie $h = \text{const}$ durch den Lufteintrittszustand bis zur Sättigungslinie) liefert die Temperatur $t_{K,1} = 18 \text{ °C}$.
- aus iterativer Rechnung

Es wird von Näherungsgleichungen für den Luftzustand ausgegangen und die Zustandsänderung $h = \text{const}$ berechnet.

Enthalpie der feuchten Luft

$$h_{L,1} = (1,006 t_{L,1}/\text{°C} + x_{L,1} (2500 + 1,86 \cdot t_{L,1}/\text{°C})) = 51,35 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{mit } p_S = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_{L,1}}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 4240,2 \text{ Pa}$$

$$x_{L,1} = 0,622 \frac{\phi_1 p_S}{p - \phi_1 p_S} = 0,008285 \frac{\text{kg Wasser}}{\text{kg trock. Luft}}$$

$$p = 10^5 \text{ Pa} \text{ Gesamtdruck}$$

Für die Kühlgrenztemperatur gelten analoge Gln. mit $t_{K,1}$ und $\phi_K = 1$. Die iterative Berechnung liefert für $h_{K,1} = h_{L,1}$ und $\phi_K = 1$

$$t_{K,1} = 18,01 \text{ °C}, \quad p_S = 2065,6 \text{ Pa}, \quad x_S = 0,01312$$

- über Energiebilanz

Bei der Kühlgrenztemperatur gilt, dass die zur Verdunstung benötigte Energie vollständig durch Wärmeübergang von der Luft geliefert wird. Mit der Gleichung für den Wärmeübergang, der benötigten Energie für die Verdunstung und dem einfachen Verdunstungsgesetz für die verdunstende Massestromdichte \hat{m}_{Verd} ergibt sich

$$\hat{q} = \alpha (t_{L,1} - t_{K,1}) = \hat{m}_{\text{Verd}} \Delta h_V = \frac{\alpha}{c_{pL}} (x_{K,1} - x_{L,1}) \Delta h_V$$

$$t_{K,1} = t_{L,1} - \frac{\Delta h_V}{c_{pL}} (x_{K,1} - x_{L,1})$$

Da die Größen Δh_V und $x_{K,1}$ von der gesuchten Temperatur $t_{K,1}$ abhängen, ist diese Gleichung nur iterativ lösbar. Mit den Werten bei $t_{K,1} = 18^\circ\text{C}$ ergibt sich z. B.

$$t_{K,1} = 30^\circ\text{C} - \frac{2458 \text{ kJ/kg}}{1,007 \text{ kJ/(kg K)}} (0,0131 - 0,008285) = 18,2^\circ\text{C}.$$

Die iterative Rechnung liefert $t_{K,1} = 18,07^\circ\text{C}$, also einen sehr ähnlichen Wert wie oben.

b) Die benötigte Austauschfläche wird durch numerische Integration der Merckelschen-Hauptgleichung berechnet.

Schrittweises Abarbeiten:

1. Festlegen der Stützstellen für Wassertemperatur $t_{W,n}$ (Vorgabe von $\Delta t_W = 1 \text{ K}$ ergibt $N = 5$ Abschnitte bzw. 6 Stützstellen)
2. Enthalpie an Phasengrenze $h_G(t_{W,n})$ aus Näherungsgleichung für Sättigungszustand berechnen

$$h_{G,n} = \frac{1,006 t_{W,n}}{^\circ\text{C}} + x_{G,n} \left(2500 + \frac{1,86 t_{W,n}}{^\circ\text{C}} \right) \frac{\text{kJ}}{\text{kg tr. Luft}}$$

$$x_{G,n} = \frac{0,622 p_S}{p - p_S} \quad \text{Wassergehalt bei Sättigung}$$

$$p_S = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_{W,n}}{100^\circ\text{C}} \right)^{8,02} \quad \text{Sättigungsdruck}$$

3. Enthalpie der Luft aus der Energiebilanz für Luft- und Wassermassestrom berechnen (für den Luft Eintrittszustand an der Stelle $n=1$ gelten die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte für die Lufttemperatur $t_{L,1}$ und die Wassertemperatur $t_{W,2}$).

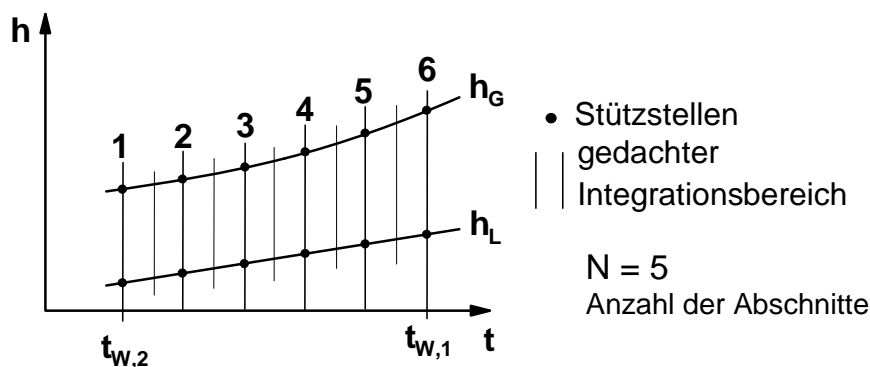
$$h_{L,n} = h_{L,n-1} + \frac{c_{pW} \dot{m}_W}{\dot{m}_L} (t_{W,n} - t_{W,n-1})$$

4. Die Verdunstungskennzahl ergibt sich aus der numerischen Integration der Merkel-schen Hauptgleichung.

$$K_V = c_{pW} \frac{t_{W,1} - t_{W,2}}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{h_{G,n} - h_{L,n}} .$$

Es ist zu beachten, dass hier die Größen $t_{W,1}$ und $t_{W,2}$ die gegebenen Werte für die Wasser-ein- und austrittstemperaturen bedeuten (nicht die Stützstellen $n = 1$ und 2).

Es wird vorteilhaft mit halben Schichten an den beiden Enden gearbeitet. Damit sind auch Ein- und Austrittszustand Stützstellen. Die Stützstellen liegen in der Mitte der betrachteten Abschnitte (bei den Randabschnitten in der Mitte eines gedachten ganzen Abschnittes).



Für die Verdunstungskennzahl ergibt sich (vgl. Tabelle)

$$K_V = c_{pW} \frac{t_{W,1} - t_{W,2}}{N} \left[\frac{0,5}{h_{G,1} - h_{L,1}} + \frac{1}{h_{G,2} - h_{L,2}} + \dots + \frac{1}{h_{G,5} - h_{L,5}} + \frac{0,5}{h_{G,6} - h_{L,6}} \right]$$

$$K_V = 1,212$$

Die Übertragungsfläche kann nun aus der Merkel-Zahl Me ermittelt werden.

$$K_V = Me = \frac{\sigma A_G}{\dot{m}_W} \quad \text{mit der Verdunstungsziffer} \quad \sigma = \frac{\alpha}{c_{pL}}$$

$$A_G = \frac{K_V \dot{m}_W c_{pL}}{\alpha} = \frac{1,212 \cdot 15 \text{ kg/s} \cdot 1,007 \text{ kJ/kg K}}{30 \text{ W/m}^2 \text{ K}} = 610 \text{ m}^2$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit kann eine Rechnung mit kleinerer Schrittweite vorgenommen werden. Bei $\Delta t_W = 0,5 \text{ K}$ (doppelte Schrittzahl) erhält man $A_G = 605,3 \text{ m}^2$ (Änderung kleiner als 1%).

Zum Vergleich sollen einige Näherungen für die Verdunstungskennzahl berechnet werden. Mit dem arithmetischen Mittel von Ein- und Austrittszustand ergibt sich (vgl. Tabelle)

$$K_V = \frac{c_{pW} (t_{W,1} - t_{W,2})}{2} \left[\frac{1}{h_{G,1} - h_{L,1}} + \frac{1}{h_{G,6} - h_{L,6}} \right] = 1,437 \quad (\text{Fehler} + 18\%)$$

Mit dem logarithmischen Mittel für die Triebkraft $h_G - h_L$ zwischen Ein- und Austrittszustand wird

$$K_V = c_{pW} (t_{W,1} - t_{W,2}) \frac{K_1 - K_2}{\ln \frac{K_1}{K_2}} = 1,30 \quad (\text{Fehler} + 7,3\%)$$

$$K_1 = \frac{1}{h_{G,1} - h_{L,1}}, \quad K_2 = \frac{1}{h_{G,6} - h_{L,6}}$$

Das logarithmische Mittel (analog Δt_m bei Wärmeübertrager) liefert im vorliegenden Fall noch eine gute Näherung. Die Näherungen führen zu einer Überdimensionierung des Apparates.

c) Der Zustandsverlauf der Luft wird durch schrittweises Abarbeiten (analog b) ermittelt:

1. Festlegen der Stützstellen für Wassertemperatur $t_{W,n}$
2. Berechnen von $x_{G,n}$, $h_{L,n}$, $h_{G,n}$ (siehe b)
3. Mischungsgerade anwenden (dies entspricht der Energiebilanz bei der Mischung von Luft und Wasser)

$$x_{L,n+1} = x_{L,n} + \frac{h_{L,n+1} - h_{L,n}}{h_{G,n} - h_{L,n}} (x_{G,n} - x_{L,n})$$

4. Lufttemperatur aus Zustandsgrößen ermitteln (Verwendung der Näherungsgleichung)

$$t_L(h_L, x_L) = \frac{h_{L,n} - 2500 x_{L,n}}{1,006 + 1,86 x_{L,n}}$$

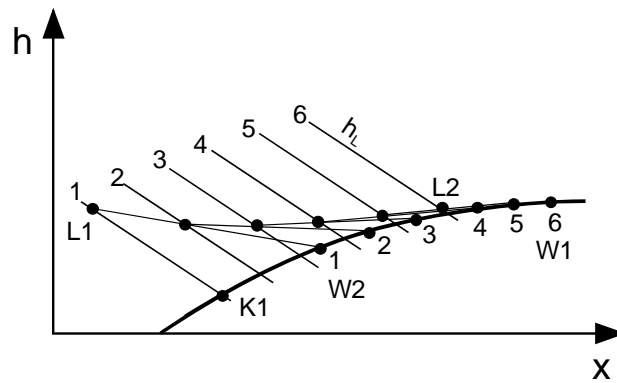
Die Ergebnisse der Rechnung sind der Tabelle zu entnehmen.

Die Lufttemperatur durchläuft ein Minimum.

Die relative Luftfeuchte nimmt stetig zu und erreicht fast Sättigung.

Eine genauere Rechnung mit doppelter Schrittzahl liefert geringe Abweichungen zu den Werten in der Tabelle ($t_{L,6} = 29,725 \text{ °C}$, $x_{L,6} = 0,9615$).

Bei der graphischen Lösung (mit ganzen Schritten an den Enden) werden immer die Luft- und Wasserzustände in einem Höhenabschnitt des Rückkühlwerkes miteinander verbunden. Es wird mit dem Luft Eintrittszustand L1 begonnen. Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zwischen Luft- und Wasserzustand (L–W) mit der Linie für die Luftenthalpie h_L liefert den Zustand für die Luft am Austritt aus dem betrachteten Abschnitt bzw. den Eintritt in den nächsten Abschnitt und damit den nächsten Konstruktionspunkt. Am Ende der Konstruktion erhält man den Luftaustrittszustand L2.



Der Kühlgrenzabstand und der Abkühlungsgrad für das Kühlwasser kennzeichnen die Wirkungsweise des Rückkühlwerkes (Indizes 1 und 2 gelten hier für den Ein- und Austrittszustand).

$$\text{Kühlgrenzabstand} \quad t_{W,2} - t_{K,1} = 26 - 18 = 8 \text{ K}$$

$$\text{Abkühlungsgrad} \quad \eta_A = \frac{t_{W,1} - t_{W,2}}{t_{W,1} - t_{K,1}} = \frac{5}{31-18} = 38,5\%$$

Der verdunstende Wasseranteil ist ein Ausdruck für den auftretenden Wasserverlust, der hier unter 1% liegt.

$$\frac{(x_{L,2} - x_{L,1}) \dot{m}_L}{\dot{m}_W} = \frac{(0,02608 - 0,008285) \cdot 6,915 \text{ kg/s}}{15 \text{ kg/s}} = 0,0082 = 0,82\%$$

Der trockene Luftmassenstrom wird mit den Werten aus Teil d) zu

$$\dot{m}_L = \rho_{L,1} \dot{V}_L / (1 + x_{L,1}) = 6,915 \text{ kg/s} \text{ berechnet.}$$

d) Die Wasseraustrittstemperatur im Teillastbereich wird mit einer Näherungsmethode ermittelt. Das ideale Luft-Wasser- Massenstromverhältnis beträgt

$$\lambda_{id} = \left(\frac{\dot{m}_L}{\dot{m}_W} \right)_{id} = \frac{c_{pW} (t_{W,1} - t_{K,1})}{h_{L,2,id} - h_{L,1}} = \frac{4,18 \text{ kJ/kg K} (31 - 18) \text{ K}}{(105,97 - 51,35) \text{ kJ/kg}} = 0,995$$

$$h_{L,2,id} = h_G (t_{W,1}) = 105,97 \text{ kJ/kg}$$

Für das reale Luft-Wasser-Massenstromverhältnis gilt laut Aufgabenstellung im Teillastbereich

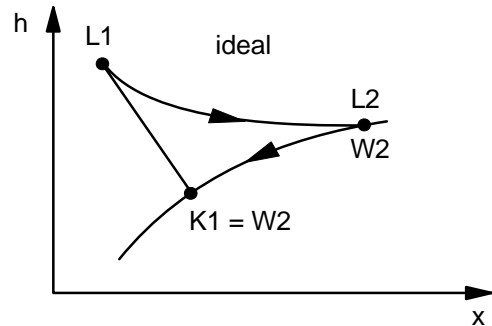
$$\lambda_{re} = \frac{\rho_{L,1} \dot{V}_L}{0,5 \dot{m}_W} = \frac{1,143 \text{ kg/m}^3 \cdot 6,1 \text{ m}^3/\text{s}}{0,5 \cdot 15 \text{ kg/s}} = 0,93$$

mit der Dichte für die feuchte Luft

$$\rho_{L,1} = \frac{p}{R_L T_{L,1}} \frac{1 + x_{L,1}}{1 + 1,61 x_{L,1}} = 1,143 \text{ kg/m}^3$$

Für den Abkühlungsgrad gilt der Näherungsansatz

$$\eta_A = K \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda_{re}}{\lambda_{id}}\right) \right)$$



Daraus kann die Kühlturmkonstante für den Auslegungszustand ermittelt werden (λ_{re} ist für den Volllastbereich zu berechnen, ebenso der Abkühlungsgrad).

$$K = \frac{0,385}{1 - \exp\left(-\frac{0,465}{0,995}\right)} = 1,031$$

Für den Teillastbereich ergibt sich für den Abkühlungsgrad

$$\eta_A = 1,031 \left(1 - \exp\left(-\frac{0,93}{0,995}\right) \right) = 0,626.$$

Für die Wasseraustrittstemperatur erhält man mit der Definition des Abkühlungsgrades

$$t_{W,2}^* = t_{W,1} - \eta_A (t_{W,1} - t_{K,1}) = 22,86 \text{ }^\circ\text{C}$$

Eine genaue Rechnung analog b) liefert 22,5 °C.

Tabelle für Ermittlung der Austauschfläche und der Zustandsänderung der Luft

Stützstelle	n		1	2	3	4	5	6
Wassertemperatur	t_W	°C	26	27	28	29	30	31
Sättigungsdruck	$p_S(t_W)$	Pa	3359,5	3563,1	3777,4	4002,9	4240,2	4489,6
Wassergehalt bei Sättigung	x_G	--	0,02162	0,02298	0,02442	0,02594	0,02754	0,02924
Enthalpie bei Sättigung	h_G	kJ/kg	81,257	85,769	90,485	95,414	100,57	105,97
Enthalpie der Luft	h_L	kJ/kg	51,354	60,355	69,355	78,356	87,356	96,356
Wassergehalt der Luft	x_L	--	0,008285	0,01230	0,01608	0,01963	0,02296	0,02608
Temperatur der Luft	t_L	°C	30	28,776	28,139	28,079	28,567	29,546
relative Feuchte	φ	--	0,31	0,4907	0,6618	0,8063	0,9118	0,9742

Lösung Aufgabe 6.7:

Gegeben: Textilbahn $\rho_T = 200 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_T = 0,06 \text{ W/(m K)}$,
 $\rho_f = 440 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,f} = 2,4 \text{ kJ/(kg K)}$, $\lambda_f = 0,3 \text{ W/(m K)}$,
 $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $\delta = 1 \text{ mm}$, $\varepsilon_T = 0,8$
 $X_1 = 1,2 \text{ kg H}_2\text{O/kg trockener Stoff}$,
 $X_2 = 0,1 \text{ kg H}_2\text{O/kg trockener Stoff}$

Luft: $t_L = 60^\circ\text{C}$, $\varphi_L = 0,1$, $p_L = 1 \text{ bar}$, $\alpha = 12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

Sorptionsisotherme: $X = 0,25 \varphi$ (gültig für $\varphi < 0,9$)

maximale hygroskopische Feuchte $X_{h,\max} = 0,4$

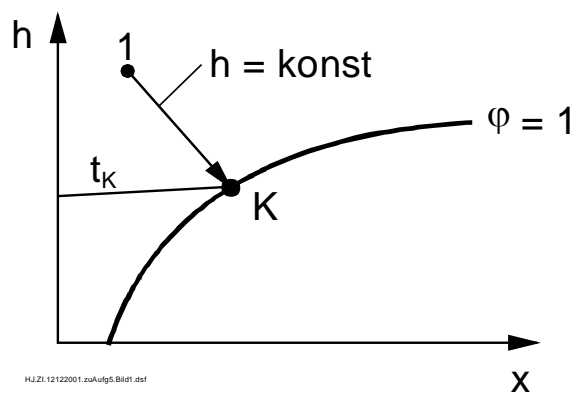
Diffusionswiderstandsfaktor $\mu_T = 3$.

Gesucht:

- Trocknungszeit $\Delta\tau_{\text{ges}}$ bei sich einstellender Temperatur
- Trocknungszeit $\Delta\tau_I$ im I. Trocknungsabschnitt bei Strahlungstrocknung mit $\hat{f}_{\text{Str}} = 500 \text{ W/m}^2$
- Trocknungszeit $\Delta\tau_I$ im I. Trocknungsabschnitt bei Kontakttrocknung mit $t_H = 35^\circ\text{C}$
- Temperaturänderung pro Zeit $dt/d\tau$ bei $t_1 = 20^\circ\text{C}$ und $t_2 = 26^\circ\text{C}$.

Lösung:

a) Bei der Trocknung stellt sich auf Grund des gekoppelten Wärme- und Stofftransportes die Kühlgrenztemperatur für das Trockengut ein. In diesem Zustand wird die gesamte zur Verdunstung benötigte Wärme von der Luft geliefert. Die Kühlgrenztemperatur kann am einfachsten mit dem h,x -Diagramm ermittelt werden. Ausgehend von dem Luftzustand Punkt 1 ($t_L = 60^\circ\text{C}$, $\varphi_L = 0,1$) erhält man mit der Linie $h = \text{konst}$ am Schnittpunkt mit der Sättigungslinie $\varphi = 1$ die Kühlgrenztemperatur $t_K = 29^\circ\text{C}$.



Es wird hier die Annahme getroffen, dass sich die Kühlgrenztemperatur sehr schnell einstellt. Das trifft dann zu, wenn die Wärmekapazität der Textilbahn im Vergleich zur benötigten Wärme für die Verdunstung klein ist. Eine iterative Berechnung der Kühlgrenztemperatur mit den Näherungsgleichungen für die Zustandsgrößen für feuchte Luft ergibt den Wert $28,7^\circ\text{C}$.

Der Stoffübergangskoeffizient an der Oberfläche der Textilbahn berechnet sich bei Annahme der Gültigkeit des Lewischen Gesetzes zu

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho_L c_{p,L}} = \frac{12 \text{ W/m}^2 \text{ K}}{1,045 \text{ kg/m}^3 \cdot 1009 \text{ J/kg K}} = 0,01138 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Stoffwerte ρ_L , $c_{p,L}$ werden näherungsweise für trockene Luft bei 60 °C aus der Tabelle S.45 im Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung entnommen.

Die verdunstende Massestromdichte im I. Trocknungsabschnitt kann auf 3 verschiedenen Wegen berechnet werden:

- Lösung mit Stoffübergangsgesetz

$$\hat{m}_{d,I} = \frac{\beta}{R_d T_m} (p_{d,W} - p_{d,L})$$

$$p_{d,W} = p_{d,S} (t_K = 29 \text{ °C}) = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_K}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 4003 \text{ Pa}$$

$$p_{d,L} = \varphi_L p_{d,S} (t_L = 60^\circ) = 0,1 \cdot 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_L}{100 \text{ °C}} \right)^{8,02} = 2016 \text{ Pa}$$

$$R_d = 461,5 \text{ J/kg K}$$

$$T_m \approx 0,5(T_L + T_K) = 317,5 \text{ K}$$

$$\hat{m}_{d,I} = \frac{0,01138 \text{ m/s}}{461,5 \text{ J/(kg K)} \cdot 317,5 \text{ K}} (4003 - 2016) \text{ Pa} \frac{\text{N/m}^2 \text{ J}}{\text{Pa Nm}}$$

$$\hat{m}_{d,I} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

- Lösung mit Verdunstungsgesetz

$$\hat{m}_{d,I} = \sigma (x_W - x_L) = 1,58 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

$$\sigma = \frac{\alpha}{c_{p,L}} = \frac{12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}}{1009 \text{ J/(kg K)}} = 0,01189 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

$$x_W = 0,622 \frac{p_{d,W}}{p - p_{d,W}} = 0,02594$$

$$x_L = 0,622 \frac{p_{d,L}}{p - p_{d,L}} = 0,0126$$

$p = 1$ bar Gesamtdruck für Luft

- Lösung mit übertragenem Wärmestrom und Energiebilanz

$$\hat{m}_{d,I} = \frac{\alpha(t_L - t_K)}{\Delta h_V} = \frac{12 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})(60 - 29)\text{K}}{2432,2 \cdot 10^3 \text{ J/kg}} = 1,53 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

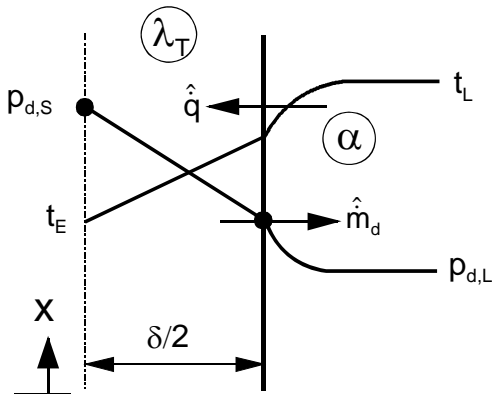
$\Delta h_V = 2432,2 \text{ kJ/kg}$ für $t_K = 29^\circ\text{C}$ (nach Wagner, W.; Kruse, A.: Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf, Springer 1998)

Alle 3 Lösungen sind ungefähr gleich (Abweichung $< 3,3\%$). Bei der Berechnung von $p_{d,L}$ wurde eine Näherungsformel benutzt, die eigentlich nur bis 40°C gültig ist. Der Fehler ist aber in diesem Fall für $p_{d,L}$ nur $1,2\%$.

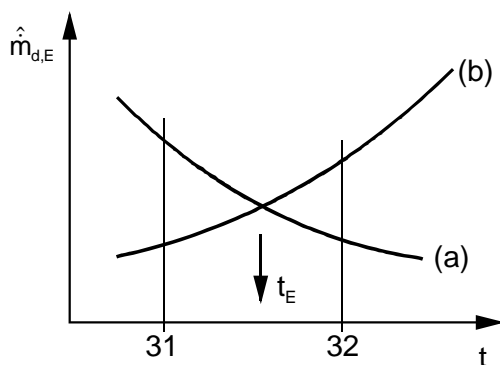
Die Endtrocknungsgeschwindigkeit muss iterativ aus den folgenden 2 Gleichungen ermittelt werden:

$$(a) \quad \hat{m}_{d,E} = \frac{1}{\Delta h_V} \frac{t_L - t_E}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta/2}{\lambda_T}}$$

$$(b) \quad \hat{m}_{d,E} = \frac{1}{R_d T_m} \frac{p_{d,S}(t_E) - p_{d,L}}{\frac{1}{\beta} + \frac{\mu \delta/2}{D_{dL}}}$$



Partialdruck- und Temperaturverlauf in halber Schicht (bei Endzustand)



iterative Ermittlung von t_E

Die Gleichung a) stellt die Energiebilanz für den Verdunstungsvorgang dar. Die verdunstende Massestromdichte wird danach aus dem Wärmetransport von der Luft bis zur Gutsmitte bestimmt. Die Gleichung b) drückt den Stofftransport zwischen Gutsmitte und Luft aus. Dabei tritt ein Stofftransportwiderstand im Gut und ein Stoffübergangswiderstand an der Oberfläche des Gutes auf. Da der Sättigungsdampfdruck $p_{d,S}$ in Gutsmitte von der sich einstellenden Temperatur t_E in Gutsmitte abhängt, müssen beide Gleichungen iterativ gelöst werden. Dazu werden 2 Werte für t_E angenommen und anschließend linear interpoliert. Für die Gleichung b) wird der Diffusionskoeffizient benötigt, der sich näherungsweise zu

$$D_{dL} = 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \left(\frac{304,5}{273 \text{ K}} \right)^{1,81} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 2,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$$

ergibt (D_{dL} wird hier bei t_E gebildet, korrekt müsste die mittlere Gutstemperatur verwendet werden).

$$t_E = 31 \text{ }^\circ\text{C}:$$

$$(a) \quad \hat{m}_{d,E} = \frac{1}{2427,5 \cdot 10^3 \text{ J/kg}} \frac{(60 - 31)\text{K}}{\frac{1}{12 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})} + \frac{0,0005 \text{ m}}{0,06 \text{ W}/(\text{m K})}} = 1,30 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

(b)

$$\hat{m}_{d,E} = \frac{1}{461,5 \text{ J}/(\text{kg K}) \cdot 318,5 \text{ K}} \frac{(4490 - 2016)\text{Pa}}{\frac{1}{0,01138 \text{ m/s}} + \frac{3 \cdot 0,0005 \text{ m}}{2,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}}} = 1,20 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

$$T_m = 0,5(T_E + T_L) = 318,5 \text{ K}$$

$$t_E = 32 \text{ }^\circ\text{C}:$$

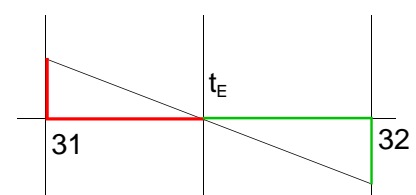
$$(a) \quad \hat{m}_{d,E} = \frac{1}{2425,1 \cdot 10^3 \text{ J/kg}} \frac{(60 - 32)\text{K}}{\frac{1}{12 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})} + \frac{0,0005 \text{ m}}{0,06 \text{ W}/(\text{m K})}} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

(b)

$$\hat{m}_{d,E} = \frac{1}{461,5 \text{ J}/(\text{kg K}) \cdot 319 \text{ K}} \frac{(4752 - 2016)\text{Pa}}{\frac{1}{0,01138 \text{ m/s}} + \frac{3 \cdot 0,0005 \text{ m}}{2,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}}} = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

Entsprechend dem Strahlensatz

$$\frac{t_E - 31}{(1,30 - 1,20) \cdot 10^{-4}} = \frac{32 - t_E}{(1,32 - 1,26) \cdot 10^{-4}}$$



ergibt sich für die Temperatur in Gutsmitte

$$t_E = 31,6 \text{ °C}$$

und für die Endtrocknungsgeschwindigkeit

$$\hat{m}_{d,E} = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$$

Für den Beginn des II. Trocknungsabschnittes gilt

$$X_B \approx X_{h,\max} = 0,4$$

und für den Beginn des III. Trocknungsabschnittes

$$X_C \approx 0,5 (X_{h,\max} + X_{Gl})$$

$$= 0,5 (0,4 + 0,025) = 0,2125 > X_2$$

Die Gleichgewichtsfeuchte für das Gut (minimal erreichbarer Wert) beträgt

$$X_{Gl} = 0,25 \quad \varphi_L = 0,25 \cdot 0,1 = 0,025 < X_2 = 0,1.$$

Die Endfeuchte liegt im III. Trocknungsabschnitt.

Die Trocknungszeit berechnet sich über die Massebilanz für die Feuchte. Es wird nur eine halbe Schicht betrachtet, da die Textilbahn von zwei Seiten getrocknet wird. Bei der Rechnung ist zu beachten, dass im II. und III. Trocknungsabschnitt die verdunstende Massestromdichte \hat{m}_d von der Gutsfeuchte X abhängig ist, d. h. es muss die Funktion $\hat{m}_d(X)$ aufgestellt und integriert werden.

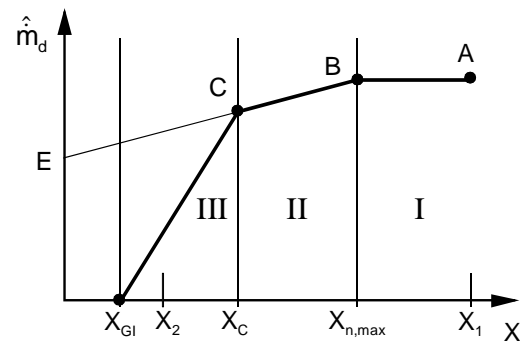
$$\hat{m}_d A d\tau = - \rho_T A \frac{\delta}{2} dX$$

$$\int_0^{\Delta\tau} d\tau = - \rho_T \frac{\delta}{2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{\hat{m}_d}$$

I. Trocknungsabschnitt ($\hat{m}_{d,I} = \text{const}$, Integrationsgrenzen X_1 und X_B)

$$\Delta\tau_I = - \rho_T \frac{\delta}{2} \frac{X_B - X_1}{\hat{m}_{d,I}}$$

$$\Delta\tau_I = - \frac{200 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 0,001 \text{ m}}{2} \frac{0,4 - 1,2}{1,54 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})} = 519,5 \text{ s}$$



II. Trocknungsabschnitt

$$\hat{m}_{d,II} = \hat{m}_{d,E} + (\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}) \frac{X}{X_B}$$

$$\Delta\tau_{II} = - \frac{\rho_T \delta}{2} \frac{X_C}{X_B} \int \frac{dX}{\hat{m}_{d,E} + \frac{\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}}{X_B} X}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad \text{allgemeine Lösung des Integrals}$$

$$\Delta\tau_{II} = - \frac{\rho_T \delta}{2} \frac{X_B}{\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}} \ln \frac{\hat{m}_{d,E} + (\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}) \frac{X_C}{X_B}}{\hat{m}_{d,E} + (\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}) \frac{X_B}{X_B}}$$

$$\Delta\tau_{II} = - \frac{\rho_T \delta}{2} \frac{X_B}{\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}} \ln \left(\frac{\hat{m}_{d,E}}{\hat{m}_{d,I}} + \left(1 - \frac{\hat{m}_{d,E}}{\hat{m}_{d,I}} \right) \frac{X_C}{X_B} \right)$$

$$= - \frac{200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,001 \text{ m}}{2} \frac{0,4}{(1,54 - 1,28) \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2\text{s)}} \ln \left(\frac{1,28}{1,56} + \left(1 - \frac{1,28}{1,56} \right) \frac{0,2125}{0,4} \right) = 127 \text{ s.}$$

III. Trocknungsabschnitt

$$\hat{m}_{d,III} = \hat{m}_{d,C} (X - X_{Gl}) / (X_C - X_{Gl})$$

$$\hat{m}_{d,C} = \hat{m}_{d,II} (X_C) = \hat{m}_{d,E} + (\hat{m}_{d,I} - \hat{m}_{d,E}) \frac{X_C}{X_B}$$

$$= 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2\text{s)} + (1,54 - 1,28) \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2\text{s)} \frac{0,2125}{0,4} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2\text{s)}$$

$$\Delta\tau_{III} = - \frac{\rho_T \delta}{2} \frac{X_2}{X_C} \int \frac{(X_C - X_{Gl}) dX}{\hat{m}_{d,C} (X - X_{Gl})}$$

$$= - \frac{\rho_T \delta (X_C - X_{Gl})}{2 \hat{m}_{d,C}} \ln \frac{X_2 - X_{Gl}}{X_C - X_{Gl}}$$

$$= - \frac{200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,001 \text{ m} \cdot (0,2125 - 0,025)}{2 \cdot 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}} \ln \frac{0,1 - 0,025}{0,2125 - 0,025} = 121 \text{ s}$$

Die gesamte Trocknungszeit ergibt sich damit zu

$$\Delta\tau_{\text{ges}} = \Delta\tau_{\text{I}} + \Delta\tau_{\text{II}} + \Delta\tau_{\text{III}} = 767,5 \text{ s} = 12,8 \text{ min} .$$

b) Die Energiebilanz bei einer Wärmeübertragung durch Konvektion und Strahlung an die Textilbahn lautet

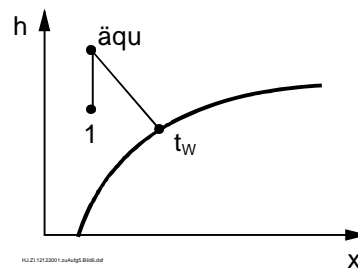
$$\Delta h_{\text{V}} \hat{m}_{\text{d,I}} = \alpha (t_{\text{L}} - t_{\text{W}}) + \varepsilon_{\text{T}} \hat{f}_{\text{Str}} = \alpha (t_{\text{L}}^* - t_{\text{W}})$$

Durch die Strahlung erhöht sich die Oberflächentemperatur der Textilbahn. Um denselben Rechenablauf wie im Teil a) anwenden zu können, wird eine äquivalente Lufttemperatur t_{L}^* berechnet, mit der die Wirkung der Strahlung erfasst wird. Aus dem obigen Ansatz ergibt sich

$$t_{\text{L}}^* = t_{\text{L}} + \frac{\varepsilon_{\text{T}} \hat{f}_{\text{Str}}}{\alpha} = 60 \text{ }^\circ\text{C} + \frac{0,8 \cdot 500 \text{ W/m}^2}{12 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}} = 93,3 \text{ }^\circ\text{C} .$$

Der äquivalente Luftzustand beträgt $t_{\text{L}}^* = 93,3 \text{ }^\circ\text{C}$ und $x_{\text{L}} = 0,0126$ (gleicher Wassergehalt der Luft wie bei a)). Dafür ergibt sich die Kühlgrenztemperatur aus dem h, x – Diagramm bzw. den Näherungsgleichungen zu

$$t_{\text{K}} = t_{\text{W}} = 35 \text{ }^\circ\text{C} , \quad x_{\text{W}} = 0,037$$



Die einfachste Berechnung der verdunstenden Massestromdichte kann mit dem Verdunstungsgesetz erfolgen.

$$\hat{m}_{\text{d,I}} = 0,01189 \text{ kg/(m}^2 \text{ s)} (0,037 - 0,0126) = 2,90 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

Durch den Strahlungswärmestrom kann die Verdunstungsmenge um 88% gesteigert werden. Die Trocknungsdauer im I. Trocknungsabschnitt beträgt

$$\Delta\tau_{\text{I}} = - \frac{200 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,001 \text{ m}}{2} \frac{0,4 - 1,2}{2,90 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m}^2 \text{ s)}} = 275 \text{ s} = 4,6 \text{ min}$$

und verringert sich damit auf 53%.

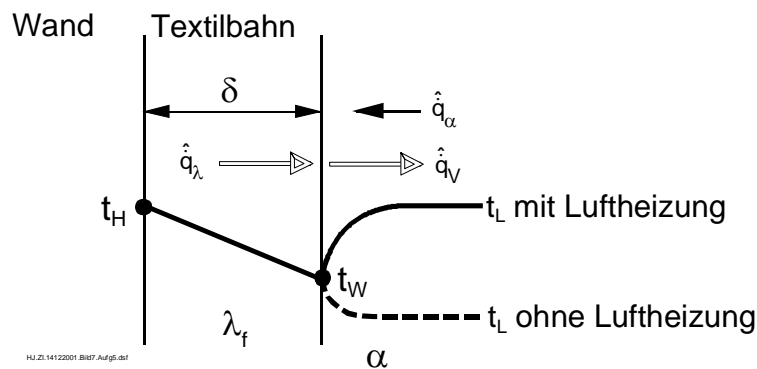
Wenn nicht mit der äquivalenten Lufttemperatur gearbeitet wird, ist eine iterative Berechnung notwendig. Dabei ist die Kühlgrenztemperatur so zu bestimmen, dass die Energiebilanz und das Verdunstungsgesetz erfüllt sind. Wenn die schon ermittelte Kühlgrenztemperatur verwendet wird, gilt für die Energiebilanz

$$\Delta h_V \hat{m}_{d,I} = 2417,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s}) = 0,701 \text{ kW}/\text{m}^2$$

$$\alpha_L (t_L - t_W) + \varepsilon_T \hat{f}_{\text{Str}} = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} (60 - 35)\text{K} + 0,8 \cdot 500 \text{ W}/\text{m}^2 = 0,700 \text{ kW}/\text{m}^2.$$

Die Energiebilanz ist erfüllt.

c) Es liegt eine Kontakttrocknung vor. Der Wärmestrom zur Verdunstung wird von der beheizten Wand durch die feuchte Textilbahn zur Oberfläche transportiert. Außerdem erfolgt noch ein Wärmeübergang von der Luft an die Oberfläche (bei $t_L > t_W$) bzw. von der Oberfläche an die Luft (bei $t_W > t_L$).



Die sich einstellende Oberflächentemperatur muss durch eine iterative Berechnung mit der Energiebilanz und dem Verdunstungsgesetz ermittelt werden.

$$\hat{m}_{d,I} \Delta h_V = \frac{\lambda_f}{\delta} (t_H - t_W) + \alpha (t_L - t_W)$$

Verdunstungsgesetz

$$\hat{m}_{d,I} = \sigma (x_W - x_L)$$

Mit der Annahme $t_W = 34 \text{ °C}$ für die Oberflächentemperatur erhält man für die verdunstende Massestromdichte aus der Energiebilanz

$$\begin{aligned} \hat{m}_{d,I} &= \frac{1}{2420,3 \text{ kJ}/\text{kg}} \left[\frac{0,3 \text{ W}/(\text{m K})}{0,001 \text{ m}} (35 - 34) \text{ K} + 12 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})(60 - 34)\text{K} \right] \\ &= 2,53 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/\text{m}^2 \text{ s} \end{aligned}$$

und aus dem Verdunstungsgesetz

$$\hat{m}_{d,I} = 0,01189 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})(0,03493 - 0,0126) = 2,65 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

Wenn näherungsweise der Mittelwert $\hat{m}_{d,I} = 2,59 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/\text{m}^2 \text{ s}$ verwendet wird, ergibt sich für die Trocknungszeit im I. Trocknungsabschnitt

$$\Delta\tau_I = -200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001 \text{ m} \frac{0,4 - 1,2}{2,59 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})} = 618 \text{ s} = 10,3 \text{ min.}$$

Die Trocknungszeit wurde größer, da die Verdunstung nur auf einer Seite der Textilbahn erfolgt.

d) Es soll abgeschätzt werden, wie schnell sich die Textilbahn der Kühlgrenztemperatur annähert. Dazu wird für zwei Temperaturen der Textilbahn deren Temperaturänderungsgeschwindigkeit berechnet. Wenn für die Textilbahn eine einheitliche Temperatur angenommen wird (quasistatische Betrachtung) gilt die instationäre Energiebilanz

$$\frac{dU}{d\tau} = m c_{pf} \frac{dt}{d\tau} = \dot{Q}_\alpha - \dot{Q}_V$$

$$m c_{pf} \frac{dt}{d\tau} = \alpha A (t_U - t) - \hat{m}_{d,I} A \Delta h_V.$$

Für die Masse der Textilbahn gilt, wenn eine halbe Bahn betrachtet wird

$$m = \rho_f V = \rho_f \frac{\delta}{2} A.$$

Die Temperaturänderungsgeschwindigkeit berechnet sich aus

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{2 \alpha}{c_{pf} \rho_f \delta} (t_U - t) - \frac{2 \hat{m}_{d,I}}{\rho_f \delta c_{pf}} \Delta h_V = \frac{2}{c_{pf} \rho_f \delta} \left[\alpha (t_U - t) - \hat{m}_{d,I} \Delta h_V \right]$$

$$t_1 = 20^\circ\text{C}:$$

$$\hat{m}_{d,I} = \sigma (x_W - x_L) = 0,01189 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})(0,01489 - 0,0126) = 2,72 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{2400 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 440 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001 \text{ m}} \left[12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} (60 - 20) \text{ K} - 2,72 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \cdot 2453,5 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 0,783 \text{ K/s}$$

$$t_2 = 26^\circ\text{C}:$$

$$\hat{m}_{d,I} = \sigma (x_W - x_L) = 0,01189 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})(0,02162 - 0,0126) = 1,072 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$$

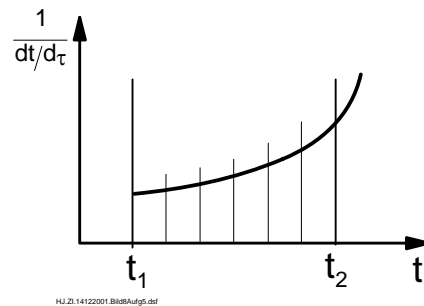
$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{2400 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 440 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,001\text{m}} \left[12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (60 - t) - 1,072 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \cdot 2439,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 0,277 \text{ K/s.}$$

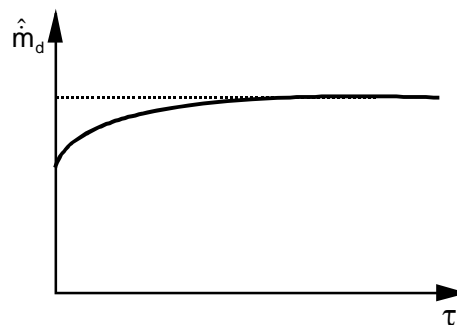
Mit Annäherung an die Kühlgrenztemperatur verringert sich die Temperaturänderungsgeschwindigkeit. Bei einer Anfangstemperatur der Textilbahn $t_1 > t_K$ (Kühlgrenztemperatur) erfolgt die Annäherung an den stationären Endzustand schneller. Die gesamte Zeit für die Annäherung berechnet sich aus der Integration

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{dt/d\tau} dt$$

Z. B. bei der numerischen Integration mit einer Schrittweite von $\Delta t = 1 \text{ K}$ ergibt sich für die Zeit einer Temperaturänderung der Textilbahn von $t_1 = 20^\circ\text{C}$ auf $t_2 = 26^\circ\text{C}$ etwa $\Delta\tau = 12,1 \text{ s}$. Die weitere Annäherung an die Kühlgrenztemperatur geht immer langsamer, da eine asymptotische Annäherung an den stationären Zustand (= Kühlgrenztemperatur) erfolgt.



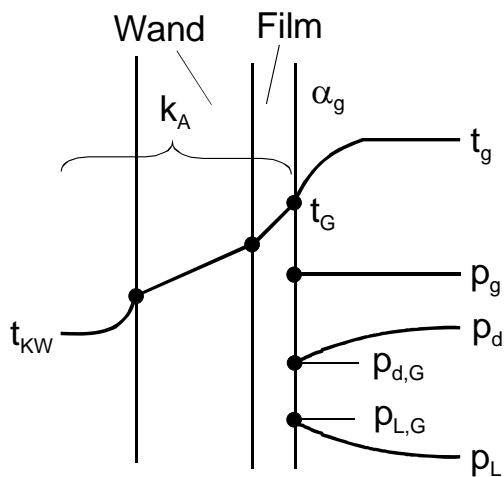
Für die Verdunstung ist bei genauerer Berechnung der Anfangsbereich evtl. zu korrigieren, da wegen $t_1 < t_K$ die verdunstende Massestromdichte anfangs kleiner ist. Die Annäherung von $t_1 = 20^\circ\text{C}$ bis $\approx t_K$ geht jedoch schnell im Verhältnis zur Trocknungszeit, so dass im vorliegenden Fall der Fehler bei der Berechnung der Trocknungszeit für den I. Trocknungsabschnitt infolge der Annahme einer konstanten verdunstenden Massestromdichte kleiner als 1,5% ist.



Lösung Aufgabe 6.9:

Gegeben:	Wasserdampf (Auslegungszustand)	$t_S = 35\text{ °C}$
	Wasserdampf-Luft-Gemisch	$\psi_L = 25\%$
	Wärmeübergangskoeffizient Gasseite	$\alpha_g = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
	Kühlwassertemperatur	$t_{\text{KW}} = 20\text{ °C}$
	Wärmedurchgangskoeffizient	$k_A = 5000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
	(Auslegungszustand)	

Gesucht: Verringerung der Leistung infolge Inertgas



Temperaturverlauf und Verlauf der Partialdrücke bei der Kondensation mit Inertgas

Nach der Aufgabenstellung soll der Gesamtdruck beim Auslegungszustand (Kondensation von reinem Wasserdampf) und bei der Kondensation mit Inertgas (= Luft) gleich sein. Wegen des Luftanteils sinkt der Partialdruck des Wasserdampfes und damit die dazugehörige Siedetemperatur, wenn laut Aufgabenstellung von einem Sättigungszustand in der Gasphase ausgegangen wird. Demgegenüber würde bei einem Dampfkraftprozess der Druck im Kondensator ansteigen, wenn zusätzlich Inertgas auftritt, da der schlechtere Wärmeübergang infolge des Inertgases durch eine größere Temperaturdifferenz zwischen Dampf und Kühlwasser ausgeglichen werden muss, um weiterhin die geforderte Kondensationsleistung zu erbringen.

Druck auf Dampfseite im Auslegungszustand

$p_g = p_S (t_S = 35\text{ °C}) = 0,005629\text{ MPa}$ nach IAPWS-IF97 (Umdruck Energielehre) oder näherungsweise

$$p_S = 288,68\text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t_S}{100\text{ °C}} \right)^{8,02} = 5620\text{ Pa}$$

Dampfpartialdruck im Wasserdampf-Luft-Gemisch

$$p_d = (1 - \psi_L) p_g = (1 - 0,25) \cdot 0,005629 \text{ MPa}$$

$$p_d = 0,004222 \text{ MPa}$$

Sättigungstemperatur zu Partialdruck des Dampfes (=Gastemperatur)

$$t_g = t_S(p_d) = 100 \text{ °C} \left(\frac{p_d}{288,68 \text{ Pa}} \right)^{\frac{1}{8,02}} - 109,8 \text{ °C} = 29,92 \text{ °C}$$

Stoffwerte für Gasgemisch bei $p_g = 0,005629 \text{ MPa}$ und $t_g = 29,92 \text{ °C}$:

Zur Bildung der Stoffwerte für das Gasgemisch werden zuerst die Stoffwerte der beiden Komponenten Dampf und Luft für den Gesamtdruck und die Gastemperatur gebildet. Die Mittelwertbildung mit den Stoffwerten für die Einzelkomponenten erfolgt durch eine geeignete Wichtung (entweder mit Volumenanteil ψ oder mit Masseanteil ξ).

Masseanteil

$$M_m = (1 - \psi_L) M_d + \psi_L M_L = (0,75 \cdot 18 + 0,25 \cdot 28,96) \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 20,74 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

$$\xi_d = \psi_d \frac{M_d}{M_m} = 0,75 \frac{18}{20,74} = 0,651$$

$$\xi_L = \psi_L \frac{M_L}{M_m} = 0,25 \frac{28,96}{20,74} = 0,349$$

Dichte (berechnet aus Summe der Partialdichten. Jede Komponente nimmt den gesamten Raum ein und steht unter dem Partialdruck)

$$\rho_{P,L} = \frac{\varphi_L p_g}{R_L T_g} = \frac{0,25 \cdot 0,05629 \text{ bar}}{287,2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 303,05 \text{ K}} = 0,04641 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{P,d} = \rho''(t_g) = 0,03024 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_g = \rho_{P,L} + \rho_{P,d} = 0,04641 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

spezifische Wärmekapazität

$$c_{pL}(t_g) = 1,007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}, \quad c_{pd}(t_g) = 1,892 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

$$c_{p,g} = \xi_d c_{p,d} + \xi_L c_{p,L} = 1,583 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

Wärmeleitkoeffizient

$$\lambda_g = \psi_d \lambda_d + \psi_L \lambda_L = (0,75 \cdot 0,01889 + 0,25 \cdot 0,02643) \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 0,02077 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Diffusionskoeffizient für Wasserdampf in Luft bzw. Luft in Wasserdampf

$$\begin{aligned} D_{dL} = D_{Ld} &= 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{p_g} \left(\frac{T_g}{273 \text{ K}} \right)^{1,81} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ &= 2,305 \cdot 10^{-5} \frac{1,0133 \text{ bar}}{0,05629 \text{ bar}} \left(\frac{303,07}{273,15} \right)^{1,81} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 5,008 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der kondensierenden Dampfmenge wird der Stoffübergangskoeffizient auf der Kondensationsseite benötigt. Da der Wärmeübergangskoeffizient auf der Gasseite gegeben ist, erfolgt die Berechnung über die Lewis-Zahl.

Lewis-Zahl

$$Le = \frac{a_g}{D_{dL}} = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_{pg} D_{dL}} = 0,5647$$

Stoffübergangskoeffizient nach Lewisschem Gesetz mit Korrektur, da $Le \neq 1$ ist (Skript S.154).

$$\beta_0 = \frac{\alpha_g}{\rho_g c_{pg} Le^{0,6}} = \frac{15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}}{0,04641 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 1,583 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} 0,5647^{0,6}} = 0,2877$$

Die Energiebilanz für die Phasengrenze sagt aus, dass die Wärmestromdichte infolge Kondensation und Konvektion auf der Gasseite gleich der Wärmestromdichte von der Phasengrenze bis zum Kühlwasser ist.

$$\hat{q} = k_A (t_G - t_{KW}) = \hat{m}_d \Delta h_V + \alpha_g (t_g - t_G)$$

Der Stofftransport für den kondensierenden Dampf durch die Gasgrenzschicht (angereichert mit Luft) berechnet sich nach dem Skript S.187 für die einseitige Diffusion (Modell A) (vgl. auch VDI-Wärmeatlas Jba oder Stephan „Wärmeübergang beim Kondensieren und beim Sieden“ S.14)

$$\hat{m}_d = \frac{\beta p_g}{R_d T} \ln \frac{p_g - p_{d,G}}{p_g - p_d}$$

$p_{d,G}$ Dampfpartialdruck an Phasengrenze

p_d Dampfpartialdruck in Gasströmung

p_g Gesamtdruck

Wegen der großen Stoffstromdichten muss eine Korrektur des Stoffübergangs erfolgen (nach Ackermann)(vgl. Skript S.187 und 155).

$$\beta = \beta_0 \frac{K}{1 - \exp(-K)} \quad , \quad K = \frac{\hat{m}_{d,0} c_{pd}}{\alpha_g} = \frac{\hat{m}_{d,0}}{\rho_g \beta}$$

Es kann auch von einer anderen Modellvorstellung ausgegangen werden, bei der der Stofftransport für die Luft von der Phasengrenze in den Gasstrom zurück berechnet wird (vgl. Skript S.186)(Modell B).

$$\hat{m}_L = \frac{\beta}{R_L T} (p_{L,G} - p_L) = \frac{\beta}{R_L T} (p_d - p_{d,G})$$

Der Zusammenhang zwischen Luft- und Dampfmassestrom im Gasstrom liefert die Dampfmassestromdichte.

$$\hat{m}_d = \frac{\xi_d}{1 - \xi_d} \hat{m}_L$$

Dieses Modell gilt nur für kleine Luftmassestromdichten, bei größeren ψ_L muss auch mit der Ackermann-Korrektur gearbeitet werden.

Iterative Lösung:

1. Annahme der Phasengrenztemperatur t_G
2. Berechnung des Dampfdruckes an Phasengrenze ($\hat{=}$ Sättigung) $p_{d,G}$
(aus Näherungsformeln für feuchte Luft)
3. Berechnung von $\hat{m}_{d,0}$ für einseitige Diffusion mit β_0
4. Berechnung der Ackermann-Korrektur β/β_0
5. Korrektur der Dampfmassestromdichte $\hat{m}_d = \hat{m}_{d,0} \beta/\beta_0$
6. Ermittlung von t_G aus Energiebilanz
7. Wiederholung des Rechenablaufs bis Abgleich von t_G erreicht ist
(oder Abgleich der Wärmeströme in Energiebilanz vornehmen)

Ergebnis nach Modell A

$$t_G = 24,43 \text{ °C} \quad , \quad p_{d,G} = 3063,5 \text{ Pa} \quad , \quad \hat{m}_{d,0} = 0,007023 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

$$\beta/\beta_0 = 1,286 \quad , \quad \hat{m}_d = 0,00903 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \quad , \quad \hat{q} = 22145 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ergebnis nach Modell B

$$t_G = 24,2 \text{ °C} \quad , \quad p_{d,G} = 3021,4 \text{ Pa} \quad , \quad \hat{m}_{L,0} = 0,003969 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

$$\beta/\beta_0 = 1,156 \quad , \quad \hat{m}_L = 0,004588 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \quad ,$$

$$\hat{m}_d = 0,008556 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \quad , \quad \hat{q} = 20993 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{Abweichung zu Stephan} - 5,2\%)$$

Bei kleineren ψ_L nähern sich die Ergebnisse nach den beiden Modellen an, z. B. bei $\psi_L = 0,05$ nur noch Abweichung von 2%.

Zum Vergleich berechnet sich der Wärmestrom ohne Inertgas (kein Widerstand auf Gasseite und damit $t_G = t_S$) zu

$$\hat{q}_{0I} = k_A (t_S - t_{KW}) = 5000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} (35 - 20) \text{ K} = 75000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Infolge des Inertgases hat sich der Wärmestrom auf

$$\frac{\hat{q}}{\hat{q}_{0I}} = 0,295 \text{ (Modell A)} \quad \text{bzw.} \quad 0,279 \text{ (Modell B)}$$

verringert.

Die Verschlechterung kommt durch 2 Effekte zustande:

1. Verringerung der Siedetemperatur der Dampfphase infolge $p_d < p_g$ (hier 34%)
2. Bildung der Luftgrenzschicht (hier 36%)

Die Verschlechterung nimmt mit kleinerem α_g und größerem ψ_L zu, z. B. nach Modell A bei $\psi_L = 0,25$

und $\alpha_g = 5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ist $\frac{\hat{q}}{\hat{q}_{0,I}} = 0,132$.

Wenn die Verschlechterung nur auf den Wärmeübergangskoeffizienten bei der Filmkondensation α_{Film} bezogen wird, ergeben sich wesentlich größere Verringerungen, z. B. bei einem angenommenen Wert von $\alpha_{\text{Film}} \approx 15000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ ergibt sich für die Temperatur an der Rohroberfläche

$$t_{\text{Wand}} = t_{\text{G}} - \frac{\hat{q}}{\alpha_{\text{Film}}} = 24,43 \text{ °C} - \frac{22145 \text{ W/m}^2}{15000 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}} = 22,954 \text{ °C}$$

Der reduzierte Wärmeübergangskoeffizient beträgt damit

$$\alpha_{\text{Film}}^* = \frac{\hat{q}}{t_{\text{S}} - t_{\text{Wand}}} = \frac{22145 \text{ W/m}^2}{(35 - 22,954) \text{ K}} = 1838,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

also nur noch 12,2% vom Wert ohne Inertgas.

Sowohl der Wärmetransport zum Kühlwasser als auch der Stofftransport in der Gasgrenzschicht beeinflussen den Vorgang (t_{G} liegt mit 24,43 °C etwa in der Mitte zwischen t_{g} und t_{KW}). Bei dem Fall mit $\alpha_{\text{g}} = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ ist der Vorgang stoffübergangskontrolliert ($t_{\text{G}} = 20,7 \text{ °C}$, größter Widerstand auf der Gasseite). Bei $k_{\text{A}} = 1000 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ ist der Vorgang wärmeübergangskontrolliert ($t_{\text{G}} = 28,12 \text{ °C}$, $\hat{q}/\hat{q}_{\text{OI}} = 0,54$, größter Widerstande auf Kühlwasserseite).

Lösung Aufgabe 7.1:

Gegeben: Betonfundament $L = 0,7 \text{ m}$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 1,7 \text{ W/(m K)}$,
 $c_p = 1050 \text{ J/(kg K)}$, $t_0 = 17^\circ\text{C}$

Luft $t_i = 21^\circ\text{C}$, $\alpha = 5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

Gesucht: a) Wärme \hat{q} pro m^2 , die vom Fundament in $\tau = 12 \text{ h}$ aufgenommen wird
 b) \hat{q} , $t_{W,\text{max}}$ und $\Delta\tau$ bei Schwingung der Lufttemperatur nach dem Ansatz
 $t_i = t_0 + 4 \text{ K} \cos(\omega \tau)$

a) Die Parameter a , Bi und Fo für das Betonfundament betragen, wenn die untere Seite des Fundamentes adiabatisch ist (charakteristische Abmessung entspricht Dicke des Fundamentes)

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{1,7 \text{ W/(m K)}}{2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 1050 \text{ J/(kg K)}} = 6,476 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,7 \text{ m}}{1,7 \text{ W/(m K)}} = 2,059$$

$$Fo = \frac{a \Delta\tau}{L^2} = \frac{6,476 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s}}{0,7^2 \text{ m}^2} = 0,0571$$

Die Lösung erfolgt mit der Näherungsmethode nach Schlünder (vgl. Skript S.23 ff oder Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.18).

$$\lambda_{\text{eff},0} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi Fo}} = \frac{2 \cdot 1,7}{\sqrt{\pi \cdot 0,0571}} \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 8,0276 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff},\infty} = 2,467 \lambda = 2,467 \cdot 1,7 \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 4,194 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$\lambda_{\text{eff}} = (\lambda_{\text{eff},0}^2 + \lambda_{\text{eff},\infty}^2)^{1/2} = 9,057 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

Die dimensionslose mittlere Temperatur berechnet sich zu

$$\vartheta_m = \exp\left(-\frac{A \delta}{V} \frac{Fo}{\frac{1}{Bi} + \frac{\lambda}{\lambda_{\text{eff}}}}\right) = \exp\left(-\frac{0,0571}{\frac{1}{2,059} + \frac{1,7}{9,057}}\right) = 0,919$$

mit $A \delta / V = 1$ für eine ebene Wand.

Nach dem Gröber-Diagramm ergibt sich $\vartheta_m = 0,916$.

Die mittlere Temperatur des Fundaments ergibt sich zu

$$t_m = t_i + (t_0 - t_i) \vartheta_m = 21^\circ\text{C} + (17 - 21) \text{K} \cdot 0,919 = 17,325^\circ\text{C}$$

Die aufgenommene Wärme pro Fläche berechnet sich mit der Energiebilanz zu

$$\hat{q} = \rho c L (t_m - t_0) = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 1050 \text{ J/(kg K)} \cdot 0,7 \text{ m} (17,325 - 17) \text{ K} = 597 \text{ kJ/m}^2$$

Zur näherungsweisen Ermittlung der Oberflächentemperatur wird das Fundament als halbumendlicher Körper betrachtet. Für die Randbedingung 3. Art gilt für die dimensionslose Oberflächentemperatur (vgl. Skript S.21 oder Umdruck S.10 mit $\eta = 0$)

$$\vartheta_w = \exp(Bi^{*2}) [1 - \text{erf}(Bi^*)]$$

$$Bi^* = Bi \sqrt{Fo} = 2,059 \sqrt{0,0571} = 0,492$$

Mit der Näherungsfunktion für die error-function (Umdruck S.11)

$$\text{erf}(Bi^*) = 1 - (0,3480242 x - 0,0958798 x^2 + 0,7478556 x^3) \exp(-Bi^{*2}) = 0,5134$$

$$x = \frac{1}{1 + 0,47047 Bi^*} = 0,812$$

ergibt sich

$$\vartheta_w = \exp(0,492^2) [1 - 0,5134] = 0,62$$

Nach dem Gröber-Diagramm ergibt sich $\vartheta_w = 0,614$.

Die Wandtemperatur beträgt nach 12 h

$$t_w = t_i + (t_0 - t_i) \vartheta_w = 21^\circ\text{C} + (17 - 21) \text{K} \cdot 0,62 = 18,5^\circ\text{C}$$

b) Es wird angenommen, dass die Temperaturschwingung bis zur Unterseite des Fundamentes abgeklungen ist. Mit dem Modell für die halbumendliche Wand kann die gespeicherte Wärme in der Wand berechnet werden (vgl. Skript S.34 oder Umdruck S.13)

$$\hat{q} = \frac{2 b \theta_A}{\sqrt{\omega} \sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}}$$

Mit dem Wärmeeindringkoeffizienten

$$b = \sqrt{\lambda \rho c_p} = \sqrt{1,7 \text{ W/(mK)} \cdot 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 1050 \text{ J/(kg K)}} = 2112,5 \frac{\text{J}}{\text{K m}^2 \text{s}^{0,5}}$$

der Amplitude für die Temperaturschwingung

$$\theta_A = 4 \text{ K}$$

und der Kreisfrequenz der Schwingung

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_A} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = 7,272 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}$$

wird

$$\beta = \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \frac{1,7 \text{ W/(mK)}}{5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}} \sqrt{\frac{7,272 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s}}{2 \cdot 6,4762 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}}} = 2,547$$

und die gespeicherte Wärme pro m^2

$$\hat{q} = \frac{2 \cdot 2112,5 \text{ J/(K m}^2 \text{ s}^{0,5}) \cdot 4 \text{ K}}{\sqrt{7,272 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s}} \sqrt{1 + 2 \cdot 2,547 + 2 \cdot 2,547^2}} = 454 \text{ kJ/m}^2$$

Für die maximale Oberflächentemperatur gilt (vgl. Skript S.22 oder Umdruck S.13)

$$\theta_w = \frac{\theta_A}{\sqrt{1 + 2\beta + 2\beta^2}} = \frac{4 \text{ K}}{\sqrt{1 + 2 \cdot 2,547 + 2 \cdot 2,547^2}} = 0,916 \text{ K}$$

$$t_w = t_0 + \theta_w = 17 \text{ }^\circ\text{C} + 0,916 \text{ K} = 17,92 \text{ }^\circ\text{C}$$

Die Phasenverschiebung an der Oberfläche berechnet sich aus (vgl. Skript S.33 oder Umdruck S.13)

$$\Delta\tau = \varepsilon \frac{\tau_A}{2\pi}$$

$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) = \arctan\left(\frac{2,547}{1+2,547}\right) = 0,6228$$

$$\Delta\tau = 0,6228 \cdot \frac{24 \text{ h}}{2\pi} = 2,38 \text{ h}$$

Die Temperaturschwingung an der Wandoberfläche hinkt der Temperaturschwingung der Umgebungsluft um 2,38 h hinterher.

Lösung Aufgabe 7.2:

Gegeben: Plattenwärmeübertrager $H = 1 \text{ m}$, $B = 2 \text{ m}$, $s = 30 \text{ mm}$
 Wasser $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,W} = 4,20 \text{ kJ/(kg K)}$
 Kältemittel $t_S = -5 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_i = 500 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
 Eis $\rho_E = 917 \text{ kg/m}^3$, $c_{pE} = 2,04 \text{ kJ/(kg K)}$, $\lambda_E = 2,25 \text{ W/(m K)}$,
 $\Delta h_{\text{Schm}} = 333 \text{ kJ/kg}$

Gesucht: a) Zeit τ bis Eisschichtdicke von $\delta_E = 10 \text{ mm}$ gebildet ist
 b) Wärmeströme \dot{Q}_m und \dot{Q}_0
 c) Wasseraustrittstemperatur t'_W und Wärmestrom \dot{Q}_W bei $t'_W = 5 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $\dot{m}_W = 4 \text{ kg/s}$, $\alpha_W = 1400 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
 d) Abschmelzgeschwindigkeit $dx/d\tau$ bei $\delta_E = 10 \text{ mm}$

a) Es ist die Gefrierzeit zu berechnen, bis sich eine Eisschichtdicke von $\delta_E = 10 \text{ mm}$ gebildet hat. Wenn die Dicke δ_E als Bezugsgröße verwendet wird, gilt für die Biot-Zahl

$$Bi_2 = \frac{\alpha_i \delta_E}{\lambda_E} = \frac{500 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,01 \text{ m}}{2,25 \text{ W/(m K)}} = 2,222$$

und die Phasenumwandlungszahl

$$Ph = \frac{\rho_W \Delta h_{\text{Schm}}}{\rho_E c_{pE} |t_{\text{Schm}} - t_S|} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 333 \text{ kJ/kg}}{917 \text{ kg/m}^3 \cdot 2,04 \text{ kJ/(kg K)} \cdot 5 \text{ K}} = 35,60$$

und die Fo-Zahl berechnet sich für den Fall des Durchfrierens der Schicht δ_E (vgl. Skript S.42 oder Umdruck S.15)

$$Fo_2 = Ph \left(\frac{1}{Bi_2} + 0,5 \right) = 33,82$$

Aus der Fo-Zahl ergibt sich die Gefrierzeit zu

$$\tau = \frac{Fo_2 \delta_E^2}{a_E} = \frac{33,82 \cdot 0,01^2 \text{ m}^2}{1,203 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 2811 \text{ s} = 46,86 \text{ min}$$

mit dem Temperaturleitkoeffizienten für die Eisschicht

$$a_E = \frac{\lambda_E}{\rho_E c_{pE}} = \frac{2,25 \text{ W/(m K)}}{917 \text{ kg/m}^3 \cdot 2,04 \text{ kJ/(kg K)}} = 1,203 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Die Berechnung hätte auch mit der Bezugslänge $l = s/2$ (halber Abstand zwischen den Platten beim Gefrieren von 2 Seiten erfolgen können. Dann sind die allgemeinen Formeln mit der Lage der Gefriergrenze $\xi = \delta_E / \ell$ zu verwenden, die aber dasselbe Ergebnis liefern.

Mit der charakteristischen Länge

$$\ell = \frac{s}{2} = \frac{30 \text{ mm}}{2} = 15 \text{ mm}$$

wird die Biot-Zahl

$$\text{Bi}_2 = \frac{\alpha_i \ell}{\lambda_E} = \frac{500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \cdot 0,015 \text{ m}}{2,25 \text{ W}/(\text{m K})} = 3,333$$

Mit der dimensionslosen Koordinate ξ für die Oberfläche der Eisschicht (Koordinate x geht von der Mitte im Kanal los)

$$\xi = \frac{x}{\ell} = \frac{s/2 - \delta_E}{\ell} = \frac{15 \text{ mm} - 10 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} = \frac{1}{3}$$

wird die Fourier-Zahl

$$\text{Fo}_2 = \text{Ph} (1 - \xi) \left(\frac{1}{\text{Bi}_2} + \frac{1 - \xi}{2} \right)$$

$$\text{Fo}_2 = 35,602 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3,333} + \frac{1 - 1/3}{2} \right) = 15,032$$

und daraus die Gefrierzeit

$$\tau = \frac{\text{Fo}_2 l^2}{a_2} = \frac{15,032 \cdot 0,015^2 \text{ m}^2}{1,203 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 2811 \text{ s}$$

b) Der mittlere Wärmestrom bei dem Gefrierprozess auf einer Plattenseite beträgt nach der Energiebilanz

$$\dot{Q}_m = \frac{m_E \Delta h_{\text{Schm}}}{\tau} = \frac{18,34 \text{ kg} \cdot 333 \text{ kJ/kg}}{2811 \text{ s}} = 2,17 \text{ kW}$$

mit der Masse m_E des Eises, das sich auf einer Plattenseite gebildet hat.

$$m_E = \rho_E \delta_E B H = 917 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 18,34 \text{ kg}$$

Der Wärmestrom zu Beginn des Gefrierprozesses berechnet sich aus der Gleichung für die Wärmeübertragung.

$$\dot{Q}_0 = \alpha_i A (t_0 - t_s) = 500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 2 \text{m}^2 5 \text{K} = 5,0 \text{kW}$$

c) Die Austrittstemperatur des Wassers berechnet sich aus den Grundgleichungen für einen Rekuperator, wobei die Wandtemperatur (hier Oberflächentemperatur der Eisschicht) konstant $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ beträgt. Mit der Energiebilanz für den Wassermassestrom

$$\dot{Q} = \dot{m}_W c_{pW} (t'_W - t''_W)$$

der Gleichung für die Wärmeübertragung (A gilt für zwei Plattenseiten)

$$\dot{Q} = \alpha_w A \Delta t_m$$

mit der mittleren Temperaturdifferenz

$$\Delta t_m = \frac{t'_W - t''_W}{\ln \frac{t'_W - t_0}{t''_W - t_0}}$$

wird nach Gleichsetzen und Umstellen die Austrittstemperatur des Wassers

$$t''_W = t_0 + (t'_W - t_0) \exp\left(-\frac{\alpha_w A}{\dot{m}_W c_{pW}}\right)$$

$$= 0 \text{ }^\circ\text{C} + 5 \text{ K} \exp\left(-\frac{1400 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}) 2 \cdot 2 \text{m}^2}{4 \text{ kg/s} 4,20 \text{ kJ}/(\text{kg K})}\right) = 3,583 \text{ }^\circ\text{C}$$

Der Wärmestrom der pro Plattenoberfläche vom Wasser aufgenommen wird, berechnet sich mit der Energiebilanz für den Massestrom im halben Kanal zu

$$\dot{Q}_W = \frac{1}{2} \dot{m}_W c_{pW} (t'_W - t''_W) = \frac{1}{2} 4 \frac{\text{kg}}{\text{s}} 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} (5 - 3,583) \text{ K} = 11,9 \text{kW}$$

d) Die Auftageschwindigkeit zu Beginn des Vorganges ergibt sich aus der instationären Energiebilanz für die Eisschicht auf einer Plattenseite

$$\frac{dH_E}{d\tau} = \dot{Q}_i - \dot{Q}_a$$

Mit der Enthalpieänderung der Eisschicht infolge Auftauens (A gilt für eine Plattenseite)

$$dH_E = \rho_E \Delta h_{\text{Schm}} A dx$$

dem Wärmestrom von der Eisoberfläche bis zum Kältemittel

$$\dot{Q}_i = \frac{t_0 - t_s}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_E}{\lambda_E}} A$$

und dem Wärmestrom an den Wassermassestrom

$$\dot{Q}_a = \dot{Q}_w$$

ergibt sich nach Umstellen die Abschmelzgeschwindigkeit zu

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\rho_E \Delta h_{\text{Schm}} A} \left(\frac{(t_0 - t_s) A}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_E}{\lambda_E}} - \dot{Q}_w \right)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{917 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 333 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} 2 \text{m}^2} \left(\frac{5 \text{K} 2 \text{m}^2}{\frac{1}{500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}} + \frac{0,01 \text{m}}{2,25 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} - 11,9 \text{kW}} \right) = -1,694 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lösung Aufgabe 7.3:

Gegeben: Warmwasserspeicher $V_F = 100 \ell$, $m_W = 25 \text{ kg}$, $c_{pW} = 0,46 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
 $A_i = 1,3 \text{ m}^2$, $k = 1 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
 Wasser $t_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_E = 60 \text{ }^\circ\text{C}$
 Umgebung $t_U = 10 \text{ }^\circ\text{C}$
 elektrische Leistung $P = 2 \text{ kW}$

Gesucht: a) Aufwärmzeit τ_1 ohne Verluste
 b) Aufwärmzeit τ_2 mit Verlusten
 c) Aufwärmzeit τ_3 bei Wasservolumenstrom $\dot{V}_F = 0,5 \ell/\text{min}$ mit $t_F = 10 \text{ }^\circ\text{C}$

a) Die Stoffwerte für Wasser werden bei $t_B = 0,5 (t_0 + t_E) = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ gebildet.

$$\rho_F = 993,95 \text{ kg}/\text{m}^3, c_{p,F} = 4,179 \text{ kJ}/(\text{kg K})$$

Die Energiebilanz für den Speicher lautet, wenn nur die Aufwärmung des Wassers betrachtet wird.

$$\tau_1 P = \rho_F V_F c_{p,F} (t_E - t_0)$$

Daraus wird die Aufwärmzeit

$$\tau_1 = \frac{\rho_F V_F c_{p,F} (t_E - t_0)}{P}$$

$$= \frac{993,95 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 0,1 \text{ m}^3 \cdot 4179 \text{ J}/(\text{kg K}) (60 - 10) \text{ K}}{2000 \text{ W}} = 10384 \text{ s} = 2,88 \text{ h}$$

b) Die Energiebilanz für den Speicher mit Berücksichtigung der Wärmeverluste an die Umgebung und der Aufwärmung der Einbauten und der Behälterwand lautet

$$\frac{dU}{d\tau} = P - k_i A_i (t - t_U)$$

Die Änderung der inneren Energie des Wassers und der Einbauten und der Behälterwand berechnet sich aus

$$dU = C dt$$

mit der Wärmekapazität

$$C = \rho_F V_F c_{p,F} + m_W c_{p,W} = 993,95 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,1 \text{ m}^3 \cdot 4179 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} + 25 \text{ kg} \cdot 460 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 426872 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die Trennung der Veränderlichen und Integration liefert

$$\frac{C dt}{P - k_i A_i (t - t_U)} = d\tau$$

$$\int_0^{\tau_2} d\tau = - \frac{C}{k_i A_i} \int_{t_0}^{t_E} \frac{dt}{t - t_U - \frac{P}{k_i A_i}}$$

$$\tau_2 = - \frac{C}{k_i A_i} \ln \frac{t_E - t_U - \frac{P}{k_i A_i}}{t_0 - t_U - \frac{P}{k_i A_i}}$$

$$\tau_2 = - \frac{426872 \frac{\text{J}}{\text{K}}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2} \ln \frac{60 \text{ }^\circ\text{C} - 10 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{2000 \text{ W}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2}}{10 \text{ }^\circ\text{C} - 10 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{2000 \text{ W}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2}} = 10849 \text{ s} = 3,01 \text{ h}$$

c) Wenn ein Wasservolumenstrom aus dem Speicher entnommen wird und durch Frischwasser ersetzt wird, lautet die Energiebilanz

$$\frac{dU}{d\tau} = P - k_i A_i (t - t_U) - \dot{C}_F (t - t_U)$$

mit dem Wärmekapazitätsstrom für den Wasserstrom

$$\dot{C}_F = \rho_F \dot{V}_F c_{p,F} = 993,95 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,5 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} \cdot 4179 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 34,61 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

Für die Änderung der inneren Energie gilt weiterhin

$$dU = C dt$$

Die Lösung analog zu b) liefert

$$\tau_3 = - \frac{C}{k_i A_i + \dot{C}_F} \ln \frac{t_E - t_U - \frac{P}{k_i A_i + \dot{C}_F}}{t_0 - t_U - \frac{P}{k_i A_i + \dot{C}_F}}$$

$$\tau_3 = - \frac{426872 \frac{\text{J}}{\text{K}}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2 + 34,61 \frac{\text{W}}{\text{K}}} \ln \frac{60 \text{ }^\circ\text{C} - 10 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{2000 \text{ W}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2 + 34,61 \frac{\text{W}}{\text{K}}}}{10 \text{ }^\circ\text{C} - 10 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{2000 \text{ W}}{1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 1,3 \text{ m}^2 + 34,61 \frac{\text{W}}{\text{K}}}}$$

$$\tau_3 = 27116 \text{ s} = 7,53 \text{ h}$$

Lösung Aufgabe 7.4:

Gegeben: Wohnraum $A_W = 80 \text{ m}^2$, $\varepsilon_W = 0,92$, $t_W = 20 \text{ °C}$
 Fenster $A_F = 6 \text{ m}^2$, $\tau_{S0} = 0,9$, $\rho_{S0} = 0,1$, $\tau_{th} = 0$, $\rho_{th} = 0,1$
 $\alpha_i = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $\alpha_a = 12 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, $t_F = 7,88 \text{ °C}$
 Umgebung $t_U = 0 \text{ °C}$
 Sonnenstrahlung $\hat{i}_{S0} = 400 \text{ W}/\text{m}^2$, $h = 25^\circ$
 Raum $t_R = 22 \text{ °C}$, $\dot{Q}_V = 1000 \text{ W}$

Gesucht: a) Energiestrom $\dot{Q}_{S,R}$ durch Sonnenstrahlung in den Raum
 b) Wärmestrom $\dot{Q}_{W,F}$ von Raumwänden an Fenster infolge Strahlung
 c) Kontrolle von t_F
 d) Wärmestrom \dot{Q}_F durch Fenster in den Raum

a) Der Energiestrom infolge Sonnenstrahlung in den Raum beträgt

$$\dot{Q}_{S,R} = \tau_{S0} A_F \hat{i}_{S0} \cos h = 0,9 \cdot 6 \text{ m}^2 \cdot 400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cos 25^\circ = 1957 \text{ W}$$

b) Der Wärmestrom infolge Strahlung von den Raumwänden an das Fenster kann mit den Unterlagen für eine Zweiflächenstrahlung berechnet werden, da nur 2 verschiedene Flächen (Fenster und Raumwände) vorliegen.

Einstrahlzahlen: $\varphi_{F,W} = 1$

$$\varphi_{W,F} = \varphi_{F,W} \frac{A_F}{A_W} = 1 \frac{6}{80} = 0,075$$

Emissionsgrad für die Fensterscheibe für thermische Strahlung (langwellige Strahlung von den Raumwänden)

$$\varepsilon_F = 1 - \tau_{th} - \rho_{th} = 0,9$$

resultierender Strahlungskoeffizient für eine Zweiflächenstrahlung (Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.57)

$$C_{W,F} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_W} - 1 + \frac{1}{\varphi_{W,F}} + \left(\frac{1}{\varepsilon_F} - 1\right) \frac{A_W}{A_F}} = \frac{5,67 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)}{\frac{1}{0,92} - 1 + \frac{1}{0,075} + \left(\frac{1}{0,9} - 1\right) \frac{80}{6}} = 0,38 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

Wärmestrom von Raumwänden an das Fenster infolge Strahlung

$$\dot{Q}_{W,F} = C_{W,F} A_W \left[\left(\frac{T_W}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_F}{100} \right)^4 \right] = 0,38 \frac{W}{m^2 K^4} 80 m^2 \left[2,9315^4 - 2,8103^4 \right] = 349,3 W$$

Es bestehen auch andere Lösungsmöglichkeiten (vgl. Umdruck zur LV Technische Thermodynamik/Teil Wärmeübertragung S.58-59).

1. sich umschließende Körper (Innenkörper = Fenster)

$$C_{F,W} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_F} + \frac{A_F}{A_W} \left(\frac{1}{\varepsilon_W} - 1 \right)} = 5,073 \frac{W}{m^2 K^4}$$

$$\dot{Q}_{W,F} = -\dot{Q}_{F,W} = -C_{F,W} A_F \left[\left(\frac{T_F}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_W}{100} \right)^4 \right] = 349,3 W$$

2. konventionelles Verfahren (Näherung)

$$\dot{Q}_{W,F} = \varepsilon_W A_W \varphi_{W,F} \varepsilon_F C_S \left[\left(\frac{T_W}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_F}{100} \right)^4 \right] = 323,3 W$$

3. Verfahren nach Glück (Näherung)

$$f_m = \frac{\sum \dot{e}_K A_K}{\sum \varepsilon_K A_K}, \quad \dot{e}_K = \varepsilon_K C_S \left(\frac{T_K}{100} \right)^4$$

$$f_m = \frac{0,92 \cdot 5,67 \cdot 2,9315^4 \cdot 80 + 0,9 \cdot 5,67 \cdot 2,8103^4 \cdot 6}{0,92 \cdot 80 + 0,9 \cdot 6} \frac{W}{m^2} = 414,3 \frac{W}{m^2}$$

$$\dot{Q}_{W,F} = -\dot{Q}_{F,W} = -A_F \left[\dot{e}_F - \varepsilon_F \varphi_{F,W} (\dot{e}_W + (1 - \varepsilon_W) f_m) \right]$$

$$= -6 \left[0,9 \cdot 5,67 \cdot 2,8103^4 - 0,9 \cdot 1 (0,92 \cdot 5,67 \cdot 2,9315^4 + (1 - 0,92) 414,3) \right] W = 349,5 W$$

c) Mit der Energiebilanz für das Fenster kann die angenommene Temperatur des Fensters überprüft werden.

$$\dot{Q}_{\text{Konv,i}} + \dot{Q}_{\text{W,F}} = \dot{Q}_{\text{Konv,a}} + \dot{Q}_{\text{F,U}}$$

Konvektiver Wärmestrom von der Raumluft an das Fenster

$$\dot{Q}_{\text{Konv,i}} = \alpha_i A_F (t_R - t_F) = 5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 6 \text{ m}^2 (22 - 7,88) \text{ K} = 423,6 \text{ W}$$

Konvektiver Wärmestrom vom Fenster an die Umgebungsluft

$$\dot{Q}_{\text{Konv,a}} = \alpha_a A_F (t_F - t_U) = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 6 \text{ m}^2 (7,88 - 0) \text{ K} = 567,4 \text{ W}$$

Strahlungswärmestrom vom Fenster an die Umgebung

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{F,U}} &= \varepsilon_F C_S A_F \left[\left(\frac{T_F}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_U}{100} \right)^4 \right] \\ &= 0,9 \cdot 5,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 6 \text{ m}^2 [2,8103^4 - 2,7315^4] \text{ K} = 205,4 \text{ W} \end{aligned}$$

Die Kontrolle $423,6 + 349,3 = 567,4 + 205,4$ liefert

$$772,9 \approx 772,8$$

und zeigt, dass die angenommene Temperatur richtig war.

d) Der Wärmetransport durch das Fenster berechnet sich mit den Wärmeströmen auf der Außenseite

$$\dot{Q}_F = \dot{Q}_{\text{S,R}} - \dot{Q}_{\text{Konv,a}} - \dot{Q}_{\text{F,U}} = 1184,2 \text{ W}$$

oder mit den Wärmeströmen auf der Innenseite des Fensters

$$\dot{Q}_F = \dot{Q}_{\text{S,R}} - \dot{Q}_{\text{Konv,i}} - \dot{Q}_{\text{W,F}} = 1184,5 \text{ W}$$

Zur Mittagszeit wird die benötigte Heizlast durch die passive Sonnennutzung gedeckt, da \dot{Q}_F größer als \dot{Q}_V ist.

Lösung Aufgabe 7.5:

Gegeben: Luftvolumenstrom $\dot{V}_{L,E} = 10000 \text{ m}^3/\text{h}$, $t_{L,E} = 28 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varphi_E = 0,6$, $p = 1 \text{ bar}$
 $x_{L,A} = 0,01$, $t_{L,A} = 15,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_L = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
 Plattenwärmeübertrager $H = 1 \text{ m}$, $B = 1 \text{ m}$, $\delta_W = 1,5 \text{ mm}$, $\lambda_W = 45 \text{ W}/(\text{mK})$,
 $\delta_P = 6 \text{ mm}$
 Kühlwasser $t_{K,E} = 6 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_{K,A} = 14 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha_K = 250 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

Gesucht: a) Übertragungsfläche A_0 ohne Widerstand von Filmoberfläche bis Kühlwasser
 b) α_F bei Filmkondensation
 c) Temperaturabfall Δt_{P-K}
 d) Wärmeübergangskoeffizient α_L auf Luftseite
 e) Wärmestrom \dot{Q} für Luftentfeuchtungsgerät

a) Die erste Rechnung wird ohne Wärmetransportwiderstände zwischen Kondensatoberfläche und Kühlwasser durchgeführt.

Die Zustandsgrößen der Luft am Eintritt betragen

$$p_S(t_{L,E}) = 288,68 \text{ Pa} \left(1,098 + \frac{t}{100^\circ\text{C}} \right)^{8,02} = 3777,4 \text{ Pa}$$

$$x_{L,E} = 0,622 \frac{\varphi_E p_S(t_{L,E})}{p - \varphi_E p_S(t_{L,E})} = 0,014424$$

$$\rho_{f,E} = \frac{p}{R_L T} \frac{1 + x_{L,E}}{1 + 1,61 x_{L,E}} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{287,2 \text{ kJ}/(\text{kg K}) \cdot 301} \frac{1 + 0,014424}{1 + 1,61 \cdot 0,014424}$$

$$= 1,1468 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Der Massestrom der feuchten Luft am Eintritt berechnet sich zu

$$\dot{m}_{f,E} = \rho_{f,E} \dot{V}_{L,E} = 1,1468 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{10000 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 3,1855 \text{ kg}/\text{s}$$

und der Massestrom der trockenen Luft am Eintritt zu

$$\dot{m}_{L,E} = \frac{\dot{m}_f}{1 + x_{L,E}} = \frac{3,1855 \text{ kg}/\text{s}}{1 + 0,014424} = 3,1403 \text{ kg}/\text{s}$$

Der anfallende Kondensatmassenstrom ergibt sich aus der Massebilanz für das Wasser in der Luft.

$$\dot{m}_{\text{Kond}} = \dot{m}_{\text{L,E}} (x_{\text{L,E}} - x_{\text{L,A}}) = 3,1403 \frac{\text{kg}}{\text{s}} (0,014424 - 0,01) = 0,013893 \text{ kg/s}$$

Die Zustandsgrößen an der Kondensatoberfläche berechnen sich analog mit den obigen Gleichungen für den Sättigungszustand ($\varphi = 1$), wobei an der Kondensatoberfläche die Kühlwassertemperatur vorliegt.

$$p_{\text{S}}(t_{\text{K,E}}) = 936,2 \text{ Pa}, \quad p_{\text{S}}(t_{\text{K,A}}) = 1599,7 \text{ Pa}$$

$$x_{\text{F,E}} = 0,005878, \quad x_{\text{F,A}} = 0,010112$$

Die Berechnung der kondensierenden Dampfmenge kann mit dem vereinfachten Verdunstungsgesetz erfolgen.

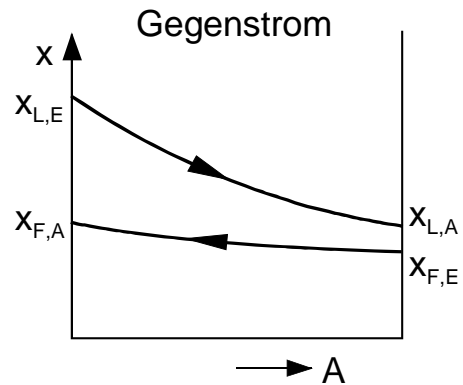
$$\dot{m}_{\text{Kond}} = \sigma A_0 \Delta x_{\text{m}}$$

Die Verdunstungsziffer ist $\sigma = \frac{\alpha_{\text{L}}}{c_{\text{pL}}}$

und die mittlere Differenz zwischen den Wassergehalten

$$\Delta x_{\text{m}} = \frac{x_{\text{L,E}} - x_{\text{F,A}} - (x_{\text{L,A}} - x_{\text{F,E}})}{\ln \frac{x_{\text{L,E}} - x_{\text{F,A}}}{x_{\text{L,A}} - x_{\text{F,E}}}}$$

$$\Delta x_{\text{m}} = 0,004216$$



Die benötigte Übertragungsfläche ergibt sich aus dem Verdunstungsgesetz zu

$$A_0 = \frac{\dot{m}_{\text{Kond}} c_{\text{pL}}}{\alpha_{\text{L}} \Delta x_{\text{m}}} = \frac{0,013893 \text{ kg/s} \cdot 1,007 \text{ kJ/kg K}}{15 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,0052997} = 221,2 \text{ m}^2$$

Eine andere Lösung ist mit dem Stoffübergangsgesetz möglich.

$$\dot{m}_{\text{Kond}} = \beta A_0 \frac{\Delta p_{\text{d,m}}}{R_{\text{d}} T}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{d,m}} &= \frac{p_{\text{d,L,E}} - p_{\text{S}}(t_{\text{K,A}}) - (p_{\text{d,L,A}} - p_{\text{S}}(t_{\text{K,E}}))}{\ln \frac{p_{\text{d,L,E}} - p_{\text{S}}(t_{\text{K,A}})}{p_{\text{d,L,A}} - p_{\text{S}}(t_{\text{K,E}})}} \\ &= \frac{0,6 \cdot 3777,4 \text{ Pa} - 1599,7 \text{ Pa} - (1,582,3 - 926,2) \text{ Pa}}{\ln \frac{0,6 \cdot 3777,4 \text{ Pa} - 1599,7 \text{ Pa}}{1,582,3 \text{ Pa} - 936,2 \text{ Pa}}} = 656,36 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$p_{d,L,A} = \frac{p \cdot x_{L,A}}{0,622 + x_{L,A}} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 0,01}{0,622 + 0,01} = 1582,3 \text{ Pa}$$

Der Stoffübergangskoeffizient wird mit dem Lewisschen Gesetz berechnet

$$\beta = \frac{\alpha_L}{\rho_L c_{pL}} = \frac{15 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})}{1,1468 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 1007 \text{ J}/(\text{kg K})} = 0,013 \text{ m/s}$$

Die benötigte Übertragungsfläche ergibt sich zu

$$A_0 = \frac{\dot{m}_{\text{Kond}} R_d T}{\beta \Delta p_{d,m}} = \frac{0,013893 \text{ kg/s} \cdot 461,5 \text{ J}/(\text{kg K}) \cdot 288 \text{ K}}{0,013 \text{ m/s} \cdot 656,36 \text{ Pa}} = 216,4 \text{ m}^2$$

Die Abweichung beträgt nur – 2,2 %.

b) Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient für die Filmkondensation auf einer senkrechten Wand bei ruhendem Dampf (Annahme) berechnet sich nach dem Skript S.71 bzw. Umdruck S.20.

Die Re-Zahl für den Kondensatfilm am unteren Ende der Platte beträgt

$$\text{Re}_F = \frac{\dot{m}_{\text{Kond}}}{b \eta_F} = \frac{0,013893 \text{ kg/s}}{221,2 \text{ m} \cdot 1307,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m s})} = 0,04803$$

mit der benetzten Breite

$$b = \frac{A_0}{H} = \frac{221,2 \text{ m}^2}{1 \text{ m}} = 221,2 \text{ m}$$

Die Nußelt-Gleichung für die laminare Filmkondensation lautet für die vorliegenden Bedingungen

$$\text{Nu}^* = 0,9245 \text{ Re}_F^{-1/3} = 2,543$$

Damit ergibt sich der Wärmeübergangskoeffizient für die Filmkondensation zu

$$\alpha_F = \text{Nu}^* \lambda_F \left(\frac{g}{\nu_F^2} \right)^{1/3} = 2,543 \cdot 0,582 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \left(\frac{9,8065 \text{ m/s}^2}{(1,308 \cdot 10^{-6})^2 \text{ m}^4/\text{s}^2} \right)^{1/3} = 26490 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

Wegen des sehr dünnen Filmes ist der Wärmeübergangskoeffizient sehr groß.

c) Der Temperaturabfall zwischen Kondensatoberfläche und Kühlwasser berechnet sich aus der Gleichung für den Wärmedurchgang

$$\Delta t_{P-K} = \dot{Q} R_d$$

Der Wärmestrom von der Luft an das Kühlwasser ergibt sich aus der Energiebilanz für die feuchte Luft

$$\dot{Q} = \dot{m}_L (h_{L,E} - h_{L,A}) = 75,675 \text{ kW}$$

$$h_{L,E} = 1,006 t_{L,E} + x_{L,E} (2500 + 1,86 t_{L,E}) = 64,979 \text{ kJ/kg}$$

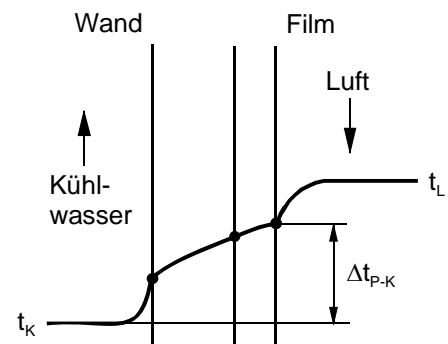
$$h_{L,A} = 1,006 t_{L,A} + x_{L,A} (2500 + 1,86 t_{L,A}) = 40,881 \text{ kJ/kg}$$

Der Widerstand von der Kondensatoberfläche bis zum Kühlwasser beträgt

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{\alpha_F} + \frac{\delta_W}{\lambda_W} + \frac{1}{\alpha_K} \right) \\ &= \frac{1}{221,2 \text{ m}^2} \left(\frac{1}{26490 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})} + \frac{0,0015 \text{ m}}{45 \text{ W}/(\text{mK})} + \frac{1}{250 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})} \right) = 1,840 \cdot 10^{-5} \frac{\text{K}}{\text{W}} \end{aligned}$$

Der Temperaturabfall wird damit

$$\Delta t_{P-K} = 75675 \text{ W} \cdot 1,840 \cdot 10^{-5} \frac{\text{K}}{\text{W}} = 1,393 \text{ K}.$$



Um diesen Temperaturabfall wird die Triebkraft für die Kondensation kleiner und damit die benötigte Fläche größer. Die Temperaturen und Partialdrücke an der Kondensatoberfläche betragen

$$t_{P,E} = t_{K,E} + \Delta t_{P-K} = 7,393 \text{ }^\circ\text{C}, \quad p_S(t_{P,E}) = 1030,4 \text{ Pa}$$

$$t_{P,A} = t_{K,A} + \Delta t_{P-K} = 15,393 \text{ }^\circ\text{C}, \quad p_S(t_{P,A}) = 1749,9 \text{ Pa}.$$

Damit ergibt sich analog zur Rechnung bei a) für die Wassergehalte und die mittlere Differenz

$$x_{P,E} = 0,006467, \quad x_{P,A} = 0,01108, \quad \Delta x_{m,1} = 0,03434$$

sowie die benötigte Übertragungsfläche, die sich um ca. 23% vergrößert hat.

$$A_1 = \frac{\dot{m}_{\text{Kond}} c_{pL}}{\alpha \Delta x_{m,1}} = 271,6 \text{ m}^2$$

Eine weitere iterative Rechnung mit einem Excel-Programm liefert

$$R_d = 1,554 \cdot 10^{-5} \text{ K/W}, \quad \Delta t_{P-K} = 1,176 \text{ K}, \quad \Delta x_m = 0,003561$$

$$A_2 = 262 \text{ m}^2$$

Damit ist die Fläche gegenüber der ersten Rechnung bei a) um 18% größer geworden.

d) Der Wärmeübergangskoeffizient α_L für die Luftströmung in den Spalten soll abschließend kontrolliert werden.

Luftgeschwindigkeit (Annahme $\dot{V}_L = \dot{V}_{L,E} = \text{const}$)

$$w_L = \frac{\dot{V}_{L,E}}{A_L} = \frac{\dot{V}_{L,E}}{\delta_P B n_L} = \frac{10000 \text{ m}^3/\text{h} / 3600 \text{ s/h}}{0,006 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 131} = 3,534 \text{ m/s}$$

Anzahl Luftkanäle (2 Oberflächen pro Luftkanal)

$$n_L = 0,5 \frac{A_2}{B H} = \frac{0,5 \cdot 262 \text{ m}^2}{1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = 131$$

Re-Zahl für Spaltströmung (charakteristische Abmessung ist doppelte Spaltbreite)

$$Re = \frac{w_L \cdot 2 \delta_P}{\nu_L} = \frac{3,534 \text{ m/s} \cdot 2 \cdot 0,006 \text{ m}}{15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 2763$$

Nu-Gleichung für turbulente Kanalströmung (mit $Pr_L = 0,7148$ und $\lambda_L = 0,02569 \text{ W}/(\text{m K})$)

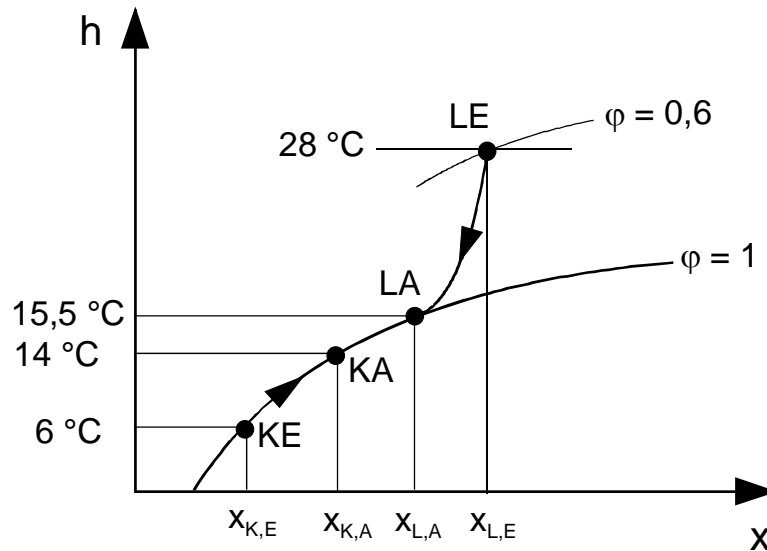
$$Nu = 0,0235 \left(Re^{0,8} - 230 \right) \left(1 + \left(\frac{2 \delta_P}{H} \right)^{2/3} \right) \left(1,8 Pr_L^{0,3} - 0,8 \right) = 6,883$$

Damit berechnet sich der Wärmeübergangskoeffizient für die Spaltströmung zu

$$\alpha_L = Nu \frac{\lambda_L}{2 \delta_P} = 14,74 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

Dieser Wert entspricht in guter Näherung dem gegebenen Wert in der Aufgabenstellung.

Darstellung der Zustandsverläufe im h,x-Diagramm



Kontrolle der Daten der Aufgabenstellung

Mit der Energiebilanz sollen die Eingangsdaten der Aufgabenstellung kontrolliert werden.

Energieänderung der Luft

$$\dot{Q}_L = \dot{m}_L (h_{L,E} - h_{L,A}) = 75,675 \text{ kW}$$

Wärmestrom von Phasengrenze zum Kühlwasser

$$\dot{Q}_d = \frac{\Delta t_{P-K}}{R_d} = 75,675 \text{ kW}$$

konvektiver Wärmestrom von Luft zur Phasengrenze

$$\dot{Q}_\alpha = \alpha_L A_2 \Delta t_{m,L} = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \cdot 262 \text{ m}^2 \cdot 10,412 \text{ K} = 40,912 \text{ kW}$$

$$\Delta t_{m,L} = \frac{28 - 15,176 - (15,5 - 7,176)}{\ln \frac{28 - 15,176}{15,5 - 7,176}} = 10,412 \text{ K} \quad \text{Triebkraft auf Luftseite}$$

benötigter Wärmestrom für die Kondensation

$$\dot{Q}_{\text{Kond}} = \dot{m}_{\text{Kond}} \Delta h_V = 0,013893 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 2477 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 34,413 \text{ kW}$$

Der von der Luft durch Konvektion an die Phasengrenze transportierte Wärmestrom und der Wärmestrom für die Kondensation müssen vom Kühlwasser aufgenommen werden bzw. bewirken die Energieänderung der Luft

$$\dot{Q}_\alpha + \dot{Q}_{\text{Kond}} = 75,325 \text{ kW} \approx \dot{Q}_d$$

Diese Bilanz stimmt sehr gut.

In der vorliegenden Aufgabe ist der Ausgangszustand der Luft und des Wassers vorgegeben. Deshalb muss nachträglich die Energiebilanz kontrolliert werden. Eigentlich stellt sich der Ausgangszustand erst ein und muss iterativ ermittelt werden. Nach der Energiebilanz ist die Änderung des Enthalpiestromes der Luft gleich dem konvektiv abgegebenen Wärmestrom an die Wand plus dem Enthalpiestrom, der vom Kondensat abgeführt wird.