| TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN<br>**Fakultät Physik**<br>Physikalisches Grundpraktikum | Versuch: **RF**<br>Aktualisiert: am 29. 05. 2019 |
|---|---|

# Innere Reibung von Flüssigkeiten

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Zähigkeit $\eta$ des Ethanols von der Temperatur $T$. Dazu sind für fünf verschiedene Temperaturen zwischen Raumtemperatur und 50 °C je zwei Messungen durchzuführen.
2. Bestimmen Sie die Koeffizienten $A$ und $b$ der *Andradeschen Gleichung* und deren Messunsicherheiten mithilfe der *Arrhenius-Auftragung* (der natürliche Logarithmus der Viskosität ($\ln \eta$) als Funktion der reziproken Temperatur ($1/T$)).
   - *Für Physik Lehramt und Physik im Nebenfach:* Bestimmen Sie aus der grafischen Darstellung den Maximalfehler des Anstiegs ($\Delta b$). Tragen Sie dazu die Geraden minimalen und maximalen Anstiegs in die grafische Darstellung ein.
   - *Für Physik Bachelor:* Bestimmen Sie aus der grafischen Darstellung die statistischen Unsicherheiten (Standardabweichungen für $A$ und $b$). Hierfür stehen für die lineare Regression unter Einbeziehung von Gewichtungen ein Python-Skript (bekannt aus dem Programmierkurs) und eine entsprechende Excelvorlage für die Eingabe der Messdaten ($T/°\mathrm{C}$, $\eta/\mathrm{mPa \cdot s}$, $\Delta\eta_{\mathrm{stat}}/\mathrm{mPa \cdot s}$) zur Verfügung.
   - *Für Physik Bachelor:* Bestimmen Sie die systematischen Messunsicherheiten für $A$ und $b$ durch Ermittelung der jeweiligen Ausgleichsgeraden für die Wertepaare ($T - \Delta T_{\mathrm{syst}}$, $\eta - \Delta\eta_{\mathrm{syst}}$) bzw. ($T + \Delta T_{\mathrm{syst}}$, $\eta + \Delta\eta_{\mathrm{syst}}$).
3. Berechnen Sie die *Reynoldssche Zahl Re* für die höchste Temperatur. *Für Physik im Hauptfach:* Überprüfen Sie anhand der berechneten *Reynoldsschen Zahl*[1], ob die Strömung laminar war.
4. Diskutieren Sie den Einfluss der fehlerhaften Größen auf den Fehler von $b$.

# 2 Allgemeine Grundlagen

## 2.1 Newtonsche zähe Flüssigkeiten

Flüssigkeiten, deren (Schub-) Viskosität im Bereich der *laminaren* Strömung eine nur von der Temperatur abhängige Konstante ist, heißen *Newtonsche Flüssigkeiten.*

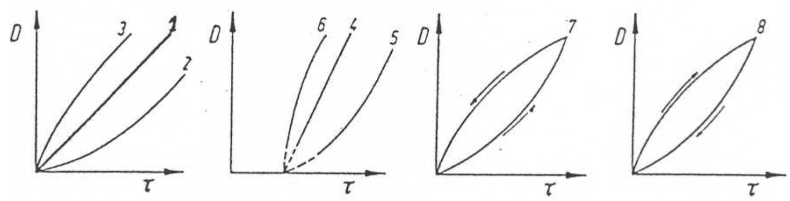


**Abb. 1:** Geschwindigkeitsgradient $D = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}z$ in Abhängigkeit von der Schubspannung $\tau$
1: Newtonsche Flüssigkeit
2,3: Suspensionen (Kakao), Kolloide, Schmelzen
4,5,6: Plaste mit Fließgrenzen (Ton, Kitt, Pasten)
7,8: zeitabhängiges Verhalten mit Hysterese [2]

[1]O. Reynolds 1842-1912

Fließt eine Newtonsche Flüssigkeit laminar in $x$-Richtung an einer Wand (oder einem Hindernis) entlang, so gleiten Flüssigkeitsschichten in der $x$-$y$-Ebene aufeinander ab und verursachen dabei eine Schubkraft $F_x$ (tangentiale Reibungskraft), für die der *Newtonsche Ansatz* gilt:

$$F_x = \eta \cdot A_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1a}$$

$$\tau = \frac{F_x}{A_{xy}} = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1b}$$

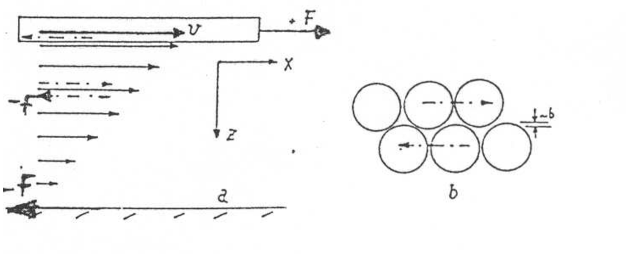


**Abb. 2:** Kräfte und Geschwindigkeitsabnahme zwischen aneinander abgleitenden Schichten in der zähen Flüssigkeit zwischen bewegter und ruhender Platte (a); mikroskopisch (b)

Dabei sind $\eta$ der Koeffizient der (dynamischen) Viskosität oder Zähigkeit, $A$ die Fläche, $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}$ der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu $\vec{v}$ und $\tau$ die Schubspannung (vgl. Abb. 2).

### 2.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt im Bereich der Raumtemperatur mit steigender Temperatur monoton ab. Bei vielen Flüssigkeiten kann der Temperaturgang mit zwei Konstanten $A$ und $b$ nach *Andrade* beschrieben werden:

$$\eta(T) = A \cdot \mathrm{e}^{b/T} \tag{2}$$

Dabei ist $A = \eta_\infty$ der hypothetische $\eta$-Wert bei $T = \infty$ und in $b$ steckt im wesentlichen die Aktivierungsenergie als Höhe von Potentialwällen bei Platzwechselvorgängen (s. Abb. 2(b)) in der Flüssigkeit, die der *Boltzmann-Statistik* genügen. Für die Wahrscheinlichkeit $w$ gilt dabei:

$$w \sim \mathrm{e}^{-\frac{b}{T}} \sim \frac{1}{\eta}$$

Die Auswertung der $\eta(T)$-Messungen erfolgt anhand der *Arrhenius-Auftragung*:

$$\ln \eta(T) = \ln A + \frac{b}{T} \tag{3}$$

## 3 Experimente

### 3.1 Kugelfall-Methode

Eine Kugel vom Radius $R$ bewegt sich mit geringer (laminare Strömung!) Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einer (Newtonschen) zähen Flüssigkeit. Dabei resultiert als Folge von Gleichung (1) die *Reibungskraft nach Stokes*[2]:

$$\vec{F} = -6\pi \cdot \eta R \cdot \vec{v} \tag{4}$$

Bei der *absoluten* Kugelfall-Methode läßt man eine Kugel, deren Radius und Dichte bekannt sind, in der Achse eines weiten ($r \gg R$) mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte $\rho_f$) gefüllten Zylinders (Radius $r$) fallen. Man bestimmt die Endgeschwindigkeit $v_e$, die sich ergibt, wenn Schwerkraft, Auftriebskraft und Reibungskraft nach Gleichung (4) im Gleichgewicht stehen:

$$\rho_k \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \cdot g - \rho_f \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \cdot g = 6\pi \cdot \eta R \cdot v_e \tag{5}$$

[2] G. G. Stokes 1819-1903

Dann gilt für die Viskosität im Idealfall sehr großer Gefäß-Weite:

$$\eta = (\rho_k - \rho_f) \cdot \frac{2R^2 \cdot g}{9v_e} \tag{6}$$

Nach Francis [6] muss der endliche Durchmesser $r$ des Fallrohres in einer Korrektur berücksichtigt werden:

$$\eta = (\rho_k - \rho_f) \cdot \frac{2R^2 \cdot g}{9v_e} \cdot \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{9/4} \approx (\rho_k - \rho_f) \cdot \frac{2R^2 \cdot g}{9v_e} \cdot \left(1 - \frac{9R}{4r}\right) \tag{7}$$

Um die Korrektur gering zu halten, sollte mit möglichst kleinen Kugeln gearbeitet werden: z. B. $2R \approx 2\,\mathrm{mm}$ für $\eta \approx 1\,\mathrm{Pa \cdot s}$ oder $2R \approx 8\,\mathrm{mm}$ für $\eta \approx 30\,\mathrm{Pa \cdot s}$ [3].

### 3.2 Höppler-Viskosimeter

Das *Höppler-Viskosimeter* stellt eine technische Variante der Kugelfall-Methode dar, bei dem das mit der Flüssigkeit gefüllte und leicht geneigte Rohr nur wenig größer als der Kugelradius ist und die Kugel[3] an einer Rohrwand abwärts gleitet. Damit braucht man bei Messungen mit dem Durchfluß-Thermostaten nur ein vergleichseweise geringes Flüssigkeitsvolumen zu temperieren. Die Gleichungen (6) und (7) sind stark modifiziert. Mit der vom Hersteller angegebenen Fallkörper-Konstate $K$ und $t$ als Fallzeit zwischen zwei Messmarken gilt:

$$\eta = K \cdot (\rho_k - \rho_f) \cdot g\, t \tag{8}$$

### 3.3 Kapillar-Viskosimeter

In einer laminaren Rohrströmung wird die Energie der Druckdifferenz in (innere) Reibungsarbeit umgewandelt. Das Gesetz von *Hage-Poiseuille*[4] stellt einen Zusammenhang zwischen der Druckdifferenz und der Zeit $t$, in der das Volumen $V$ durch ein Rohr mit dem Durchmesser $r$ und der Länge $l$ strömt, her:

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot r^4}{8\eta \cdot l} \cdot \Delta p \tag{9}$$

Eine technische Ausführungsform stellt das *Kapillar-Viskosimeter nach Ubbelohde* dar (s. Abb. 3). Die Flüssigkeit fließt aus dem Vorratsgefäß A unter der Wirkung des Schweredrucks $\rho\, g\, h$ durch die Kapillare K. Unterhalb der Kapillare zweigt das Rohr R ab. Seine obere Öffnung wird nach Ansaugen der Flüssigkeit freigegeben, wodurch unterhalb der Kapillare ein konstanter (äußerer Luftdruck) herrscht. Es wird die Zeit $t$ gemessen, in der der Flüssigkeitsspiegel die Marken $\mathrm{m}_1$ und $\mathrm{m}_2$ passiert. Am Eingang der Kapillare muss die Flüssigkeit beschleunigt werden, womit eine Verzögerung verbunden ist. Die entsprechende Hagenbachsche Korrektur-Zeit $t_k$ ist angegeben und von der Messzeit zu subtrahieren, sodass gilt:

$$\eta = C\, \rho_f\, g \cdot (t - t_k) \tag{10}$$

Die nur von der Geometrie abhängige Gerätekonstante $C$ ist ebenfalls angegeben und kann mit der mittleren Druckhöhe $h$ aus Gleichung (9) bestimmt werden.

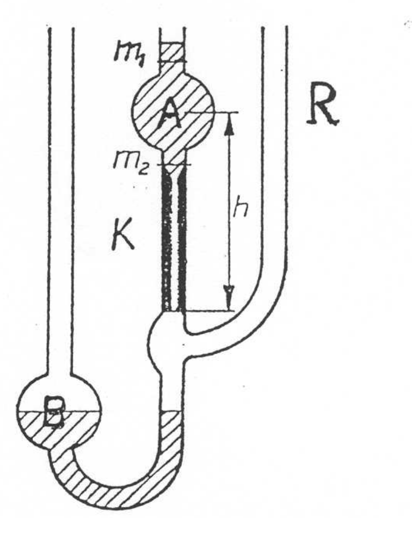

**Abb. 3:** Viskosimeter nach Ubbelohde

[3] Beim Viskosimeter nach Lawaczek ist die Kugel durch zylindrische Fallkörper ersetzt.
[4] G. H. L. Hagen 1797-1884; J-L. M. Poiseuille 1799-1869

# 4 Hinweise zu den Versuchen

## 4.1 Prüfung auf laminare Strömung

Bei höheren Temperaturen könnte bei gegebener Geschwindigkeit die laminare Strömung in die turbulente umschlagen, sodass unter Umständen die Anwendung der Gesetze (4) bis (9) zu Fehlern führen würde. Eine Überprüfung des möglichen Umschlags zur Turbulenz kann anhand der *kritischen Reynoldsschen Zahl* $Re_{\text{krit}}$ erfolgen. Die dimensionslose Reynoldssche Zahl $Re$ als Verhältnis von Reibungs- und Beschleunigungs-Arbeit berechnet sich mit $l^*$ als charakteristischer Länge zu:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l^*}{\eta} \tag{11}$$

**Rohr** Hierbei ist die charakteristische Länge $l^* = d = 2r$ damit folgt [1][3][5]:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \quad \text{mit} \quad Re_{\text{krit}} \approx 2200 \tag{12}$$

**Kugel** Mit der charakteristichen Länge $l^* = 2\,R$ folgt für diesen Fall [7]:

$$Re = \frac{2R \cdot \rho \cdot v}{\eta} \quad \text{mit} \quad Re_{\text{krit}} \approx 1000 \tag{13}$$

Der Quotient $\eta/\rho$ heißt kinematische Zähigkeit. Es empfiehlt sich, zu dem jeweils niedrigsten gemessenen $\eta$-Wert anhand der eigenen Messdaten die Reynoldssche Zahl zu bestimmen und mit dem kritischen Wert zu vergleichen.

# 5 Anhang

## 5.1 Viskositätswerte

| Flüssigkeit | Temperatur / °C | $\eta$ /Ns $\cdot$ m$^{-2}$ |
|---|---|---|
| Wasser | 0 | $1{,}787 \cdot 10^{-3}$ |
| | 20 | $1{,}002 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $0{,}547 \cdot 10^{-3}$ |
| Ethanol | 0 | $1{,}78 \cdot 10^{-3}$ |
| | 20 | $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ |
| | 50 | $0{,}7 \cdot 10^{-3}$ |
| Glyzerin | 0 | 12,1 |
| | 20 | 1,48 |
| | 50 | 0,18 |

**Tabelle 1:** Zähigkeitswerte einiger Flüssigkeiten

## 5.2 Prüfung auf Newtonsches Verhalten*

Um zu entscheiden, ob eine Flüssigkeit Newtonsches Verhalten zeigt oder nicht, müsste anhand der Beziehungen (4) bzw. (8) die Konstanz des Proportionalitätsfaktors $\eta$ bei Variation der Kräfte bzw. Druckdifferenzen getestet werden. Beim Höppler-Viskosimeter gelingt das in geringem Maße durch Einsatz verschiedener Kugeln mit unterschiedlichen Dichten und Radien. Das Kappilar-Viskosimeter lässt dagegen eine Variation der Druckdifferenz nicht zu.

Bei Rotations-Viskosimetern rotiert ein Zylinder (Radius $r_1$) in einem zylindrischen mit der Flüssigkeit gefüllten Gefäß (Radius $r_2$ mit $r_2 - r_1 \ll r_1$). Die Reibungskraft am Umfang beträgt (vergleich dazu auch Gleichung (1)):

$$F_\tau \approx 2\pi \cdot r_1\, h \cdot \eta\, \omega \cdot \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

Diese Kraft erzeugt das zu messende Drehmoment $M \approx F \cdot r_1$ und es gilt

$$M \approx 2\pi \cdot \eta\, h \cdot \frac{r_1^3}{r_2 - r_1} \cdot \omega = C \cdot \eta\, \omega \tag{14}$$

Hiermit können Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe eines Motors in weiten Grenzen variiert und die Konstanz von $\eta$ überprüft werden.

## 5.3 Zur Herleitung*

### 5.3.1 Hagen-Poiseuille

Am koaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius $r$ und der Länge $l$ greift am Mantel die folgende Reibungskraft an:

$$F_R = 2\pi \cdot r\, l\, \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = A^* \cdot \eta \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$$

Zusätzlich greift und an der Stirnfläche eine Druckkraft an:

$$F_p = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p = A \cdot \Delta p$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_R = F_p$ folgt nach einer Integration[5] zunächst das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil $v(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta p}{2\eta \cdot l} \cdot r \quad \Rightarrow \quad v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot r^2 \quad \text{mit} \quad v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot R^2 \tag{15}$$

Weiter wird das Volumen und dessen zeitliche Änderung betrachtet, das zwischen zwei Schichten mit den Radien $r$ und $r + \mathrm{d}r$ ströment

$$\mathrm{d}V = 2\pi \cdot r\, \mathrm{d}r \mathrm{d}s \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi \cdot v(r) \cdot r\, \mathrm{d}r$$

Damit ergibt eine Integration über den ganzen Querschnitt:

$$\frac{V}{t} = 2\pi \cdot \int_0^R v(r)\, \mathrm{d}r = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta \cdot l} \cdot R^4 \tag{16}$$

### 5.3.2 Stokes

Die Stokes'sche Gleichung (4) wird exakt in der theoretischen Hydrodynamik hergeleitet (z. B in [8]). Ein grobe Abschätzung, in der das Geschwindigkeits-Gefälle in (1) vereinfacht wird zu $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \approx \frac{v}{r}$ und als gleich auf der ganzen Kugeloberfläche angenommen wird ($A \approx 4\pi \cdot r^2$) liefert den zu geringen Wert:

$$F \approx 4\pi \cdot \eta\, r^2 \cdot \frac{v}{r} \approx 4\pi \cdot \eta\, r \cdot v \tag{17}$$

## Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von L. Jahn erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

## Fragen

1. Was versteht man unter einer laminaren und einer turbulenten Strömung?
2. Wie berechnet sich der Strömungswiderstand in einer laminaren und in einer turbulenten Rohrströmung?
3. Man prüfe anhand eines Beispiels aus Tabelle 1 die Gültigkeit der Gleichung (3) und bestimme die Konstanten $A$ und $b$.
4. Was versteht man unter einer Newtonschen Flüssigkeit? Wie kann der Nachweis dafür erbracht werden?
5. Wie ist die Reynoldsche Zahl definiert?
6. Berechnen Sie $x(t)$ für die Start-Phase einer Kugel, die in einer zähen Flüssigkeit zu fallen beginnt. Nach welcher Strecke erreicht die Kugel $0{,}67v_e$ bzw. $0{,}99v_e$?
   (Beispiel: $\rho_k = 8\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$; $\rho_f = 1\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$; $R = 3\,\mathrm{mm}$)
7. Wie unterscheiden sich Ursache und Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen?
8. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil in einer laminaren Rohrströmung und für eine umströmte Kugel.
9. Was besagt das Gesetz von Stokes zur inneren Reibung?
10. Wie lautet das Gesetz von Hagen-Poiseuille?

## Literatur

[1] A. Recknagel, *Physik: Mechanik*, Technik-Verlag, Berlin 1990
[2] F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 2/3*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1985
[3] F. X. Eder, *Moderne Messmethoden der Physik, Band 1: Mechanik, Akustik*, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960
[4] H. J. Paus, *Physik in Experimenten und Beispielen*, Verlag C.-Hanser, München 1995
[5] C. Gerthsen, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1995
[6] A. W. Francis, *Physics 4, 404*, , 1933
[7] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Verlag de Gruyter, Berlin 1954
[8] G. Joos, B. Fricke, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Aula-Verlag, Wiesbaden 1989