Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016

4. Übungsblatt für die Woche 02.05. - 08.05.2016

Unendliche Reihen, stetige Funktionen

Begriffe: Konvergenzkriterien für Reihen, stetige Funktion, Definitions- und Wertebereich

Ü19 Beweisen Sie die Aussage des Wurzelkriteriums für unendliche Reihen. Führen Sie es dazu auf das Vergleichskriterium mit einer geeigneten geometrischen Reihe zurück. Ganz ähnlich funktioniert es für das Quotientenkriterium. Und zwar, wie?

Ü20 Verwenden Sie geeignete Konvergenzkriterien, um die folgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen. Welche der Reihen sind sogar absolut konvergent?

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{7(k-1)!}$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$,

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{2k-1}$, (e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)^2}{2^k}$, (f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$.

Ü21 Ermitteln Sie für die folgenden reellen Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R}$ den größten Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ und den zugehörigen Wertebereich $W(f)$, und fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen an:

(a) $f(x) = 4x(1-x)$, (b) $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$, (c) $f(x) = \ln(|x+1| - 2)$.

Welche der Funktionen sind stetig? Welche sind injektiv? Welche sind surjektiv? Finden Sie alle Intervalle, in denen eine Umkehrfunktion existiert und berechnen Sie f^{-1} für jedes dieser Intervalle. Denken Sie daran, jeweils den Definitionsbereich von f^{-1} anzugeben.

A H22 Wählen Sie aus Wurzel-, Quotienten- und Leibnizkriterium ein geeignetes Konvergenzkriterium aus, um die folgenden zwei Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} \left(4 - \frac{3}{k}\right)^{-k}$ (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k}\right) \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

H23 (a) Betrachtet wird die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{\dfrac{4n+1}{2n-3}} - \sqrt{2}$.

Bestimmen Sie den Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, b_n$? Begründen Sie!

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mittels geeigneter Kriterien auf Konvergenz:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)^2}{2\cdot 3^k}, \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k-\sqrt{k}}, \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (k+1)!}{k^k}.$$

Welche der Reihen konvergieren absolut?

H22 Gegeben sind die reellen Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} - 1,$ (b) $g(x) = \ln(|x+1| - |x|)$.

Bestimmen Sie für beide Funktionen ihren größten Definitionsbereich $D(f)$ und das zugehörige Bild $W(f)$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse! Geben Sie dabei genau an, welche Eigenschaften bekannter Funktionen Sie nutzen!