Lineare Abbildung

Eine Abbildung $F : D \to W$ heißt **linear**, falls sie

(1) homogen: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in D : F(\lambda x) = \lambda F(x)$ und

(2) additiv: $\forall x_1, x_2 \in D : F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ ist.

System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Lösung: n-Tupel $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$, das – für $x_1, \ldots, x_n$ eingesetzt – alle m Gleichungen erfüllt.

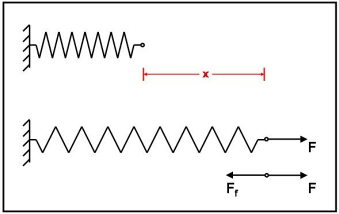
Lösungsmenge: Menge aller Lösungen des Gleichungssystems.

Beispiele linearer Funktionen

(1) Aus der Physik

Federkraft: Die Kraftwirkung ist **proportional** zur Auslenkung der Feder

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

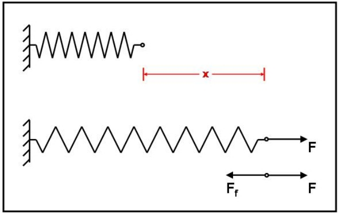


Beispiele linearer Funktionen

(1) Aus der Physik

Federkraft: Die Kraftwirkung ist **proportional** zur Auslenkung der Feder

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

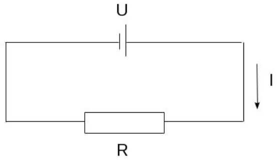


Die Kraft als Funktion der Auslenkung $\vec{F}(\vec{x}) = -k\vec{x}$ ist **linear**.

Beispiele linearer Funktionen

(2) Elektrotechnik

Einfacher Schaltkreis: Ein Strom I fließt durch einen Widerstand R bei angelegter Spannung U



Es gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$R = \frac{U}{I}$$

- fester Widerstand: Strom als Funktion der Spannung $I(U) = \frac{1}{R}U$ ist **linear**.
- Feste Spannung: Strom als Funktion des Widerstandes $I(R) = \frac{U}{R}$ ist **nichtlinear**, denn z.B.

$$I(2R) = \frac{U}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{R} \neq 2\,I(R).$$

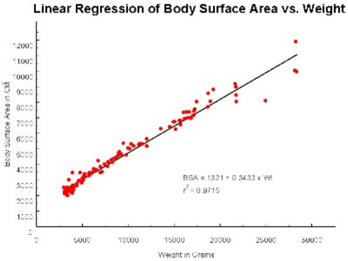
Beispiele linearer Funktionen

(3) Aus der Datenanalyse

Lineare Regression:

Gesucht ist die "bestapproximierende" Gerade für die gegebene Datenmenge.

Ansatz: $y(x) = a \cdot x + b$



Die Funktion $y(x)$ ist für $b \neq 0$ **nichtlinear**, denn z.B.

$$y(2x) = a(2x) + b = 2ax + b \;\neq\; 2y(x) = 2ax + 2b\;,$$

aber sie ist **affin-linear**.

Beispiele linearer Funktionen

(4) Aus der mathematischen Modellierung

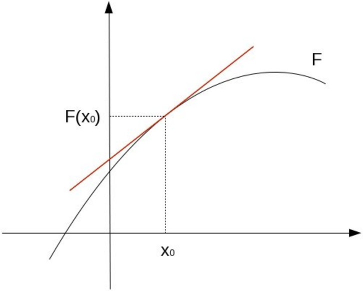
Linearisierung mathematischer Modelle:

nichtlineares Modell $\Rightarrow$ lineares Modell

nichtlineares Modell: $F(x) = r$

Lokale Linearisierung:

$$F(x) \sim F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$



Beispiele linearer Funktionen

(5) Aus der Ökonomie

Eine Firma produziert drei Produkte P_1, P_2 und P_3.

Gewünschter Überschuß von Produkt P_i sei c_i,

produzierte Einheiten von P_i seien x_i, $i = 1, 2, 3$.

	P_1	P_2	P_3
P_1	0.1	0.05	0.4
P_2	0	0.2	0.5
P_3	0.3	0.2	0

Input von P_i, um eine Einheit von P_j zu erzeugen (i,j=1,2,3).

$\Rightarrow$ **lineares Gleichungssystem:**

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1-0.1)x_1 & - & 0.05x_2 & - & 0.4x_3 & = & c_1 \\ & & (1-0.2)x_2 & - & 0.5x_3 & = & c_2 \\ -0.3x_1 & - & 0.2x_2 & + & x_3 & = & c_3 \end{array}$$

Matrix, Vektor und Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechte-Seite-Vektor:

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A ist eine $(m \times n)$**-Matrix**, b ein Spaltenvektor der Länge m.

Ein **Spaltenvektor der Länge k** ist eine $(k \times 1)$-Matrix.

Ein **Zeilenvektor der Länge k** ist eine $(1 \times k)$-Matrix