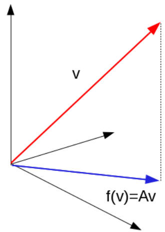
Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax.$

- **Projektionen**



z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

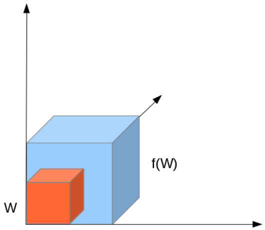
die senkrechte Projektion auf die xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Projektionen sind weder injektiv noch surjektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax$.

- **Skalierungen** (Vergrößern, Verkleinern & Spiegeln)



z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

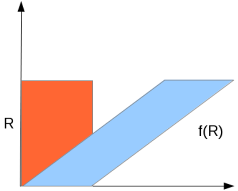
Vergrößerung um den Faktor 2 in $\mathbb{R}^3$.

Skalierungen sind bijektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax.$

- **Scherungen**



z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

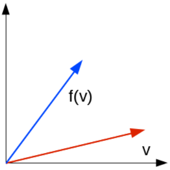
Verzerrung in x-Richtung in $\mathbb{R}^2$.

Scherungen sind bijektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax$.

- **Rotationen**



$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel φ um den Nullpunkt im math. positiven Drehsinn in $\mathbb{R}^2$.

Rotationen sind bijektiv.

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ läßt sich als **Komposition** solcher Transformationen schreiben:

$$\boxed{f(x) = Ax = (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)x}$$

Die Determinante

Die Determinante ist ein charakteristischer Wert für eine quadratische Matrix.

$\boxed{\text{im } \mathbb{R}^2\text{:}}$ $\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

Geometrische Interpretation: $|\det A|$ ist der Flächeninhalt des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelogramms.

$\boxed{\text{im } \mathbb{R}^3\text{:}}$

$$\begin{aligned} \det A \quad &:= \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &:= \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

(Sarrussche Regel)

Geometrische Interpretation: $|\det A|$ ist das Volumen des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds.

Die Determinante

Die **Determinante** einer $(n \times n)$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist der Wert

$$\begin{aligned} \det A &:= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \end{aligned}$$

für eine beliebig fest gewählte Zeile i (**Entwicklung nach der i-ten Zeile**), dabei ist A_{ij} die Matrix, die sich ergibt, wenn die i-te Zeile und j-te Spalte von A gestrichen werden.

Der Wert der Determinante kann auch durch Entwicklung nach einer beliebigen Spalte j von A ermittelt werden:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

Berechnung der Determinante

Verhalten der Determinante unter elementaren Zeilenoperationen:

- Das Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A ändert nur das Vorzeichent der Determinante, d.h: $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$:

  $\det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n) = -\det(a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n)$.

- Beim Skalieren einer Zeile skaliert die Determinante in gleicher Weise, d.h.

  $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$: $\det(a_1 \ldots \lambda a_i \ldots a_n) = \lambda \det(a_1 \ldots a_i \ldots a_n)$.

- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht, d.h. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$:

  $\det(a_1 \ldots a_i + \lambda a_j \ldots a_n) = \det(a_1 \ldots a_n)$.

Algorithmus zur Berechnung von det A:

(1) Reduziere die Matrix A auf Zeilenstufenform U ohne Skalierungen.
Die Anzahl Zeilenvertauschungen sei m.

(2) Berechne die Determinante aus der Determinante von U:

$$\det A = (-1)^m \det U = (-1)^m u_{11} \cdot \ldots \cdot u_{nn}.$$

Eigenschaften der Determinante

Es sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann gilt:

- A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
- $\text{rg}\,(A) = n$ (die Spalten von A sind linear unabhängig) $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
- $Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

Eigenschaften der Determinante: Für beliebige $n \times n$-Matrizen A, B gilt:

1. $\det A^T = \det A$.
2. $\det\,(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
3. falls A^{-1} existiert, gilt: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
4. Ist A von Blockstruktur, $A \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, mit $m \times m$, $m \times s$ und $s \times s$ Matrizen A_1, A_2 bzw. A_3 (0 ist die $s \times m$-Nullmatrix), so gilt:

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_3.$$

Determinante einer linearen Abbildung

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$.

Es gilt, dass der Wert der Determinante der Darstellungsmatrizen von f bzgl. aller Basen von V gleich ist. Die Determinante ist damit ein charakteristischer Wert der linearen Abbildung:

Die **Determinante von** f ist definiert als $\det f := \det A$ für die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer beliebigen Basis von V.

Geometrische Bedeutung der Determinante:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $S \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet endlichen Volumens. Dann gilt

$$\text{Volumen}(f(S)) = |\det f| \cdot \text{Volumen}(S).$$