Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$.

Frage: Gibt es Vektoren $v \in \mathbb{K}^n$, die unter der Wirkung von A lediglich skaliert werden?

Definition: Ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n,\ v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** der Matrix A, falls es ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt, so dass

$$Av = \lambda v.$$

Der zugehörige Skalar heißt **Eigenwert** der Matrix A.

Es gilt: $\quad Av = \lambda v \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda E_n)v = 0.$

Also gibt es einen Eigenvektor v von A mit Eigenwert λ gdw. das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E_n)v = 0$ nichttriviale Lösungen besitzt.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Erinnerung:

$(A - \lambda E_n)v = 0$ besitzt nichttriviale Lösungen

$\Leftrightarrow \quad A - \lambda E_n$ ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \quad A - \lambda E_n$ hat Spalten, die keine Pivotspalten sind

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E_n) = 0$

$\vdots$

Definition: Das Polynom n-ten Grades $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix A.

Folgerung:

Die Eigenwerte einer $(n \times n)$-Matrix A sind die Nullstellen des Polynoms $p_A(\lambda)$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes reelle Polynom $p(x)$ vom Grad n besitzt genau n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{C}$, und zwar reelle und ggf. Paare konjugiert komplexer Nullstellen. Dabei werden alle Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Und es gilt:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Die Vielfachheit der Eigenwerte einer Matrix A als Nullstellen von $p_A(\lambda)$ heißt **algebraische Vielfachheit**.

Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ von A:

- Die Menge aller Eigenvektoren v zum Eigenwert λ ist die Lösungsmenge von $(A - \lambda E_n)v = 0$ bis auf den Nullvektor, d.h. $\mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \setminus \{0\}$.
- Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ vereinigt mit dem Nullvektor heißt **Eigenraum von** A **zum Eigenwert** λ, bezeichnet mit $E_A(\lambda)$.
- $E_A(\lambda)$ ist für jeden Eigenwert λ von A ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.
- Die Dimension von $E_A(\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ.