Eigenwerte und Eigenvektoren

Es gilt:

- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist größer oder gleich 1 und stets kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.
- Für Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ einer $(n \times n)$-Matrix A gilt stets

$$E_A(\lambda_1) \cap E_A(\lambda_2) = \{0\} .$$

- Sind $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu paarweise unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ einer $(n \times n)$-Matrix A, dann ist die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.

Spezialfall:

Besitzt eine $(n \times n)$-Matrix A genau n paarweise unterschiedliche Eigenwerte, so sind alle Eigenräume eindimensional und jede Menge aus n zugehörigen Eigenvektoren zu den Eigenwerten bildet eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte von A^{-1}:

Ist A invertierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und einer Menge zugehöriger Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$, so hat A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$ mit denselben Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$.

Eigenwerte von A^T:

Die transponierte Matrix zu einer $(n \times n)$-Matrix A hat dieselben Eigenwerte wie A, aber i.a. nicht dieselben zugehörigen Eigenvektoren.

Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A (d.h. $A = A^T$):

- Eine symmetrische Matrix A hat stets n reelle Eigenwerte (gezählt mit ihrer algebraischen Vielfachheit).
- Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind zueinander orthogonal.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Paare komplexwertiger Eigenwerte:

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit komplexwertigen Eigenwerten.

Es gilt:

- Komplexwertige Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer paarweise auf, und zwar ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle.
- Die Berechnung der Eigenvektoren kann ganz analog wie in $\mathbb{R}$ erfolgen, nur konsequent in $\mathbb{C}$.
- Ist λ eine komplexwertige Nullstelle, so sind auch die zugehörigen Eigenvektoren komplexwertig.
- Ist $v = u + \mathrm{i}w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = a + \mathrm{i}b$, so ist $\overline{v} = u - \mathrm{i}w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$.