Lineare diskrete dynamische Systeme

Ein System

$$w_{k+1} = Aw_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $(n \times n)$-Matrix A und Startvektor w_0 heißt **lineares diskretes dynamisches System**.

Voraussetzung: A besitze n reelle Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und eine Eigenvektorbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Dann folgt für einen beliebigen Startvektor $w_0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$w_k = c_1 \lambda_1^k v_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k v_n.$$

Es gilt:

- Ist $|\lambda_j| > 1 \quad \Rightarrow \quad |c_j \lambda_j^k v_j| \to \infty$.
- Ist $|\lambda_j| < 1 \quad \Rightarrow \quad |c_j \lambda_j^k v_j| \to 0$.
- Ist $\lambda_1 > \lambda_2$, so dreht sich der Vektor w_k für $k \to \infty$ in Richtung des Eigenvektors v_1.

Nichtlineare diskrete dynamische Systeme

Gegeben sei ein **nichtlineares diskretes dynamisches System**:

$$w_{k+1} = F(w_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Startvektor w_0 und einer **stationären Lösung** w^*, d.h. $F(w^*) = w^*$.

Approximation des nichtlinearen Systems durch ein lineares System

$$w_{k+1} \approx \underbrace{F(w^*)}_{=w^*} + F'(w^*)(w_k - w^*)$$

$\Rightarrow$ Linearisierung: $$\underbrace{w_{k+1} - w^*}_{=:d_{k+1}} = \underbrace{F'(w^*)}_{=:A}\underbrace{(w_k - w^*)}_{=:d_k}$$

mit $d_0 := w_0 - w^*$.

Das lineare System gibt Auskunft über das Verhalten des nichtlinearen Systems nahe der stationären Lösung w^* (Ruhelage).

Euklidische Vektorräume

Ein **Skalarprodukt** auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, die folgende Axiome erfüllt:

$\forall u, v, w \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:$

(S1)	$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$	Linearität
(S2)	$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$	Symmetrie
(S3)	$\langle u, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$	positive Definitheit.

Das Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **euklidischer Vektorraum**.

Länge und Abstand von Vektoren

Es sei V ein Vektorraum.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt **Norm**, falls sie folgende Axiome erfüllt:
$\forall u, v \in V, \forall c \in \mathbb{R}$:

(N1) $\|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0$

(N2) $\|cu\| = |c|\|u\|$ Skalierung

(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Dreiecksungleichung.

Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren in einem Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ ist

$$\operatorname{dist}(u, v) := \|u - v\|.$$

Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, dann ist durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \qquad \text{für alle } v \in V$$

eine Norm auf V definiert, die sogenannte **euklidische Norm**.

Orthogonalität

Für einen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

$$\forall u, v \in V : \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \, ,$$

dabei ist $\|\cdot\|$ die zugehörige euklidische Norm.

Orthogonalität:

Zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraumes heißen **orthogonal**, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Schreibweise: $u \perp v$.

Ein Vektor v heißt **orthogonal zu einem Unterraum** U von V, falls $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in U$ gilt. Schreibweise: $v \perp U$.

Das **orthogonale Komplement** eines Unterraumes U von V ist die Menge

$$U^\perp := \{v \in V \mid v \perp U\} \, .$$

Die Menge $U^\perp$ bildet einen Unterraum von V.
Hat V die Dimension n, so gilt $\dim U^\perp = n - \dim U$.