Orthogonale Mengen

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

Eine Menge von Vektoren $\{u_1, \ldots, u_k\}$ aus V heißt **orthogonal**, falls

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0 \qquad \text{für alle } i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Eine Menge von Vektoren $\{u_1, \ldots, u_k\}$ aus V heißt **orthonormal**, falls sie orthogonal ist und $\|u_j\| = \sqrt{\langle u_j, u_j\rangle} = 1$ für $j = 1, \ldots, k$.

Es gilt:

Jede orthogonale Menge von Nichtnull-Vektoren $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ ist linear unabhängig.

Orthogonale Basis

Eine **Orthogonalbasis** eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ ist eine Basis von V, die eine orthogonale Menge ist.

Eine **Orthonormalbasis** von V ist eine Basis von V, die eine orthonormale Menge ist.

Darstellung in Koordinaten einer Orthogonalbasis:

Es sei $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Orthogonalbasis von $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$. Dann hat jeder Vektor $v \in V$ die eindeutige Darstellung

$$v = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n \quad \text{mit} \quad c_j = \frac{\langle v, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle},\ j = 1, \ldots, n\,.$$

Ist $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sogar eine Orthonormalbasis, so gilt $c_j = \langle v, u_j\rangle,\ j = 1, \ldots, n$.
In dem Fall ist $\langle v, u_j\rangle$ folglich die orthogonale Projektion von v auf die Richtung u_j.

Best-Approximation

Es sei U ein Unterraum eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$.

Orthogonale Zerlegung:

Jeder Vektor $y \in V$ kann eindeutig zerlegt werden in $\quad y = \hat{y} + z$
mit $\hat{y} \in U$ und $z \in U^{\perp}$.

Man nennt $\hat{y}$ die **orthogonale Projektion** von y auf U.
Bezeichnung: $\mathrm{proj}_U(y) := \hat{y}$.

Bestapproximation eines Vektors $y \in V$ durch ein Element aus U:

Für jedes $y \in V$ ist $\mathrm{proj}_U(y)$ der zu y nächstgelegene Punkt bzgl. der zugeordneten euklidischen Norm:

$$\|y - \mathrm{proj}_U(y)\| \leq \|y - u\| \quad \text{für alle } u \in U\ .$$

Ist in U eine Orthogonalbasis $\{u_1, \ldots, u_k\}$ gegeben, dann gilt für jedes $y \in V$

$$\mathrm{proj}_U(y) = \frac{\langle y, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 + \ldots + \frac{\langle y, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}\, u_k\ .$$

Der Gram-Schmidt-Prozess

Algorithmus, der aus einer gegebenen Basis eines Unterraumes U eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ eine orthogonale Basis konstruiert.

Es sei $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von U.
Schrittweise Konstruktion einer Orthogonalbasis $\{u_1, \dots, u_k\}$ von U:

- $u_1 := b_1$ $\qquad W_1 := \text{Span}(\{u_1\})$
- $u_2 := b_2 - \text{proj}_{W_1}(b_2)$ $\qquad W_2 := \text{Span}(\{u_1, u_2\})$

  $\vdots \qquad\qquad \vdots$

- $u_{k-1} := b_{k-1} - \text{proj}_{W_{k-2}}(b_{k-1})$ $\qquad W_{k-1} := \text{Span}(\{u_1, \dots, u_{k-1}\})$
- $u_k := b_k - \text{proj}_{W_{k-1}}(b_k)$

$$= b_k - \frac{\langle b_k, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\, u_1 - \dots - \frac{\langle b_k, u_{k-1}\rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle}\, u_{k-1}$$