Vektoroperationen

Es seien $v = (v_1, \dots, v_k)^T, w = (w_1, \dots, w_k)^T \in \mathbb{K}^n$,
$\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.

Summe: $$v + w := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_k + w_k \end{bmatrix}$$

Skalierung: $$\lambda v := \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_k \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt: $$v \bullet w = v^T w = \sum_{j=1}^{k} v_j w_j .$$

Matrix-Vektor-Produkt

System linearer Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und rechter Seite $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$.

Zeilenvektoren von A: $\quad z_i := [a_{i1}, \ldots, a_{in}],\ i = 1, \ldots, m.$

Matrix-Vektor-Produkt:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z_1 x \\ \vdots \\ z_m x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Matrixoperationen

Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei $(m \times n)$- Matrizen, $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.

Summe: $A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

Produkt mit Skalar: $\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Seien $A = (a_{ij})$ eine $(s \times m)$-Matrix, $B = (b_{ij}) = [b_1, \dots, b_n]$ eine $(m \times n)$- Matrix

Produkt: $C = A \cdot B := [Ab_1, \dots, Ab_n]$

Für beliebige Indizes $i \in \{1, \dots, s\}, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Eigenschaften von Matrixoperationen

I. **Addition**

Es seien A, B, C Matrizen der Größe $m \times n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt:

(A1) $A + B = B + A$ (Kommutativgesetz)

(A2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativgesetz)

(A3) $A + 0 = A$ (0 ... Nullmatrix der Größe $m \times n$)

(A4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(A5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Eigenschaften von Matrixoperationen

II. **Multiplikation**

Es seien A, B, C Matrizen der Größen $m \times n$, $n \times r$ bzw. $r \times s$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(M1) $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz)

(M2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

(M3) $E_m A = A = A E_n$

Eigenschaften von Matrixoperationen

III. **Distributivgesetze**

Es seien A, B, C Matrizen derart, dass die folgenden Operationen definiert sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(1) $A(B + C) = AB + AC$

(2) $(B + C)A = BA + CA$

IV. **Transponierte Matrix**

Es seien A, B, C Matrizen derart, dass die folgenden Operationen definiert sind, und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(T1) $(A^T)^T = A$

(T2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(T3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(T4) $(AB)^T = B^T A^T$