Die inverse Matrix

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt <u>invertierbar</u>, wenn es eine $(n \times n)$-Matrix B gibt, so dass

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Bezeichnung: $A^{-1} := B$ <u>inverse Matrix</u> von A.

Invertierbare Matrizen heißen <u>regulär</u>, nicht invertierbare Matrizen <u>singulär</u>.

<u>Es gilt:</u> Ist A eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jeden Vektor $b \in \mathbb{K}^n$ die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1}b.$$

Für invertierbare $(n \times n)$-Matrizen A, B gilt:

- $(A^{-1})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beispiel Gauss-Algorithmus – Vorwärtsphase –

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 16 & (2) \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 15 & (3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \\ 2 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -9 & (3') \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\ & & & - & x_3 & = & -1 & (3'') \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ \color{red}{0} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix

Beispiel Gauss-Algorithmus – Rückwärtsphase –

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\
 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\
 & & & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & + & x_2 & & & = & 21 & (1') \\
 & & \frac{1}{2}x_2 & & & = & \frac{7}{2} & (2'') \\
 & & & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrcrl}
x_1 & & & = & 7 & (1''') \\
 & x_2 & & = & 7 & (2''') \\
 & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \color{red}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix

Gauss-Algorithmus

Matrizen A und B, die auseinander durch Anwendung von elementaren Zeilenoperationen hervorgehen, heißen zueinander zeilen-äquivalent.

Zeilenstufenform:

- Alle Zeilen mit Nichtnulleinträgen liegen oberhalb der Nullzeilen.
- Jeder führende Eintrag einer Zeile (d.h. der von links gesehen erste Nichtnulleintrag) liegt rechts des führenden Eintrags der darüberliegenden Zeile.

Reduzierte Zeilenstufenform: Zeilenstufenform, für die gilt:

- Der führende Eintrag der Nichtnullzeilen ist 1.
- Jeder führende Eintrag einer Zeile ist der einzige Nichtnulleintrag in seiner Spalte.

Es gilt: Jede Matrix ist zu genau einer Matrix in reduzierter Zeilenstufenform zeilen-äquivalent.

Elementarmatrizen

Elementarmatrix heißt jede $(n \times n)$-Matrix, die durch das Ausführen einer elementaren Zeilenoperation aus der Einheitsmatrix E_n entsteht.

Jede elementare Zeilenoperation angewandt auf eine $(m \times n)$-Matrix A kann als Multiplikation von A mit einer geeigneten Elementarmatrix geschrieben werden.

Beispiel: für 3×3 Matrizen

$\boxed{\text{Skalieren: } \lambda \cdot (3)}$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Vertauschen: } (2) \Leftrightarrow (3)}$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Addieren: } (2) + \lambda \cdot (1)}$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel weiter:

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \lambda \cdot 7 & \lambda \cdot 8 & \lambda \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda \cdot 1 + 4 & \lambda \cdot 2 + 5 & \lambda \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Jede elementare Zeilenoperation ist reversibel, m. a. W. jede Elementarmatrix ist invertierbar.

Inverse für das Beispiel:

$$\mathrm{E}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{E}_2^{-1} = \mathrm{E}_2, \qquad \mathrm{E}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem zur Äquivalenz linearer Systeme

Sind die erweiterten Koeffizientenmatrizen zweier linearer Systeme $Ax = b$ und $\tilde{A}x = \tilde{b}$ zeilenäquivalent ($[A|b] \sim [\tilde{A}|\tilde{b}]$), so sind die Systeme äquivalent (d.h. sie haben dieselbe Lösungsmenge).

Beweis: Es existieren Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ mit

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot [A|b] = [\tilde{A}|\tilde{b}].$$

$$\Rightarrow \quad E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = \tilde{A} \quad \text{und} \quad E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot b = \tilde{b}.$$

Es gilt damit:

$$\begin{aligned} A\,s = b \quad &\Leftrightarrow \quad E_k \cdot \ldots \cdot E_1 A\,s = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 b \\ &\Leftrightarrow \quad \tilde{A}s = \tilde{b}. \end{aligned}$$