

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Es sei A eine $(m \times n)$ -Matrix.

Pivot-Position: Ist eine Position (i, j) in A , die zu einer führenden "1" in der reduzierten Zeilenstufenform (ZSF) von A gehört.

Pivotspalte: Ist eine Spalte von A , die eine Pivot-Position enthält.

Existenz einer Lösung von $Ax = b$:

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn die ZSF von $[A|b]$ keine Zeile der Form $[0 \dots 0 \ c]$ mit $c \neq 0$ enthält (d.h. wenn die letzte Spalte keine Pivotspalte ist).

Eindeutigkeit der Lösung von $Ax = b$:

Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, so besteht die Lösungsmenge aus

- einer eindeutigen Lösung \Leftrightarrow jede Spalte von A ist Pivotspalte,
- unendlich vielen Lösungen \Leftrightarrow mindestens eine Spalte von A ist keine Pivotspalte.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ sind die

- **Basisvariablen** diejenigen Variablen des Gleichungssystems, die Pivotspalten der Koeffizientenmatrix A zugeordnet sind,
- **freie Variablen** diejenigen Variablen des Gleichungssystems, die keine Basisvariablen sind.

Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, so besteht die Lösungsmenge aus

- einer eindeutigen Lösung \Leftrightarrow alle Variablen sind Basisvariablen,
- unendlich vielen Lösungen \Leftrightarrow es existiert mindestens eine freie Variable.

Es gilt:

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $(m \times n)$ -Matrix A ist für **jeden** Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar $\Leftrightarrow A$ besitzt in **jeder** Zeile eine Pivot-Position.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

$$\begin{array}{rccccccr} x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & - & 2x_5 & = & -4 \\ -2x_1 & - & 12x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & - & 4x_5 & = & -8 \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ -2 & -12 & -2 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 18 & 4 & -7 & -4 & -8 \end{array} \right)$$

Mit Gauss-Algorithmus in ZSF (Vorwärtsphase):

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Ablesen:

- Basisvariable: x_1, x_3 und x_5 ,
- freie Variable: x_2 und x_4 .
- Letzte Spalte ist nicht Pivotspalte \Rightarrow Lösungen existieren.
- Es existieren freie Variable \Rightarrow unendlich viele Lösungen.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel: Weiter mit Gauss-Algorithmus in reduzierte ZSF (Rückwärtsphase):

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \end{array} \right)$$

⇒ Lösungsmenge:

$$x_1 = -6x_2 - 3x_4$$

$$x_3 = 5 + 4x_4$$

$$x_5 = 7$$

$x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

Bezeichnung der Parameter: z.B. $x_2 =: t$, $x_4 =: s$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & -6t - 3s \\ x_2 & = & t \\ x_3 & = & 5 + 4s \\ x_4 & = & s \\ x_5 & = & 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 - 6 \cdot t - 3 \cdot s \\ x_2 & = & 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot s \\ x_3 & = & 5 + 0 \cdot t + 4 \cdot s \\ x_4 & = & 0 + 0 \cdot t + 1 \cdot s \\ x_5 & = & 7 + 0 \cdot t + 0 \cdot s \end{array}$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel:

Bezeichnung der Parameter: z.B. $x_2 =: t$, $x_4 =: s$

$$\begin{array}{l} x_1 = -6t - 3s \\ x_2 = t \\ x_3 = 5 + 4s \\ x_4 = s \\ x_5 = 7 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}}_{=v_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_2} \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Lösungsmenge in parametrischer Vektorform

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Beispiel: Lösungsmenge in parametrischer Vektorform:

Bezeichnung der Parameter: z.B. $x_2 =: t$, $x_4 =: s$

$$\begin{array}{l} x_1 = -6t - 3s \\ x_2 = t \\ x_3 = 5 + 4s \\ x_4 = s \\ x_5 = 7 \end{array} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}}_{=v_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_2} \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

Kurz: $x = v_0 + t v_1 + s v_2, \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$.

Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge ist eine Ebene in \mathbb{R}^5 , die an den Vektor v_0 "angeheftet" ist.