# Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein **homogenes lineares Gleichungssystem** ist von der Form $Ax = 0$.

Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist stets lösbar, denn es besitzt die **triviale** Lösung $x = 0$.

**Nichttriviale Lösungen:**

- Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn das Gleichungssystem mindestens eine freie Variable besitzt.
- Hat ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $(m \times n)$-Matrix $A$ genau $k$ freie Variable, dann existieren Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$, so dass für die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ gilt:

$$\mathcal{L} = \{t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\} \ .$$

# Ausbalancieren chemischer Gleichungen

$PbN_6$ und $Cr\,Mn_2\,O_8$ reagieren zu $Pb_3\,O_4$, $Cr_2\,O_3$, $Mn\,O_2$ und $NO$

Also:

$$m_1 \cdot PbN_6 + m_2 \cdot Cr\,Mn_2\,O_8 \to m_3 \cdot Pb_3\,O_4 + m_4 \cdot Cr_2\,O_3 + m_5 \cdot Mn\,O_2 + m_6 \cdot NO$$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pb | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| N | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Cr | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Mn | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| O | 0 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 |

# Ausbalancieren chemischer Gleichungen

$$m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + m_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + m_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Aufgabe: Homogenes lineares GLS lösen.

Mit Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 13 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & -44 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eine freie Variable

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.

Gauss-Algorithmus Rückwärtsphase:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 13 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & -44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{22}{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{90} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{44}{45} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge:

$$[m_1, m_2, m_3, m_4, m_5]^T = \left[\frac{5}{30} m_6, \frac{22}{45} m_6, \frac{5}{90} m_6, \frac{11}{45} m_6, \frac{44}{45} m_6\right]^T, \quad m_6 \in \mathbb{R}$$

Lösungsmenge in parametrischer Vektorform:

$$[m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T = t \cdot \left[\frac{5}{30}, \frac{22}{45}, \frac{5}{90}, \frac{11}{45}, \frac{44}{45}, 1\right]^T, \; t \in \mathbb{R}$$

# Ausbalancieren chemischer Gleichungen

Lösungsmenge:

$$[m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T = t \cdot \left[\frac{5}{30}, \frac{22}{45}, \frac{5}{90}, \frac{11}{45}, \frac{44}{45}, 1\right]^T, \; t \in \mathbb{R}$$

Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen!

"Minimale" Lösung für $t = 90$:
$[m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T = [15, 44, 5, 22, 88, 90]$

Balancierte chemische Reaktionsgleichung:

$$15\,PbN_6 \;+\; 44\,Cr\,Mn_2\,O_8 \rightarrow 5\,Pb_3\,O_4 \;+\; 22\,Cr_2\,O_3 \;+\; 88\,Mn\,O_2 \;+\; 90\,NO$$

# Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Es sei $Ax = b$ mit $(m \times n)$-Matrix $A$ und $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar und $s \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung.

Dann gilt: Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{K}^n$, die sich als

$$x = s + x_h$$

schreiben lassen, wobei $x_h$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $Ax = 0$ ist.

# Berechnung der inversen Matrix

<u>Theorem 8:</u> **- Über die inverse Matrix -**

Es sei $A$ eine $(n \times n)$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $A$ ist invertierbar.
2. $A$ hat n Pivot-Positionen.
3. $A$ ist zeilen-äquivalent zu $E_n$.
4. Das lineare GLS $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ lösbar.
5. Das homogene lineare GLS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.
6. Es existiert eine $(n \times n)$-Matrix $C$, so dass $C \cdot A = E_n$.
7. Es existiert eine $(n \times n)$-Matrix $D$, so dass $A \cdot D = E_n$.