LU-Faktorisierung

Eine **LU-Faktorisierung** einer $(n \times n)$-Matrix A ist eine Zerlegung $A = L \cdot U$ mit einer

unteren Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \ddots & & \vdots \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ * & \dots & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

und einer oberen Dreiecksmatrix

$$U = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$*$ ... beliebiger Eintrag

Anwendung für Systeme $Ax = b$ mit fester quadratischer Matrix A und unterschiedlichen rechten Seiten b.

LU-Faktorisierung

Bei gegebener LU-Faktorisierung $A = LU$ einer $(n \times n)$-Matrix A wird das lineare Gleichungssystem in zwei Schritten gelöst:

- $\boxed{\text{1.Schritt: Berechne die Lösung } y \text{ von } Ly = b \text{ durch Vorwärtseinsetzen.}}$
- $\boxed{\text{2.Schritt: Berechne die Lösung } x \text{ von } Ux = y \text{ durch Rückwärtseinsetzen.}}$

Aufwand für diese Berechnung ist von der Ordnung $O(n^2)$.
Aufwand für die Berechnung mit Gauss-Algorithmus ist von der Ordnung $O(n^3)$.

Die LU-Faktorisierung kann mit dem Gauss-Algorithmus berechnet werden.

Für sehr große dünn-besetzte lineare Gleichungssysteme werden iterative Lösunsgverfahren verwendet.

Vektorräume

Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer binären Operation $*: G \times G \to G$, die folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Die Operation $*$ ist assoziativ.

(2) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$: $\forall a \in G: \; e * a = a * e = a$

(3) Jedes Element besitzt ein Inverses: $\forall a \in G \, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Eine Gruppe heißt **abelsch**, falls $*$ kommutativ ist.

Ein **Körper** ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei binären Operationen $+_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}})$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element $0_{\mathbb{K}}$).

(2) $(\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \cdot_{\mathbb{K}})$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element $1_{\mathbb{K}}$).

(3) Es gelten die Distributivgesetze:
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; (a +_{\mathbb{K}} b) \cdot_{\mathbb{K}} c = (a \cdot_{\mathbb{K}} c) +_{\mathbb{K}} (b \cdot_{\mathbb{K}} c)$.
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; a \cdot_{\mathbb{K}} (b +_{\mathbb{K}} c) = (a \cdot_{\mathbb{K}} b) +_{\mathbb{K}} (a \cdot_{\mathbb{K}} c)$.

Vektorräume

Ein **Vektorraum** über einem Körper $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ ist eine nichtleere Menge V, auf der zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ definiert sind (üblicherweise bezeichnet mit Addition bzw. Multiplikation mit einem Skalar), die die folgenden Axiome erfüllen:

(1) $\forall u, v \in V : \ u + v \in V$ — Abgeschlossenheit von +

(2) $\forall u, v \in V : \ u + v = v + u$ — Kommutativität

(3) $\forall u, v, w \in V : \ (u + v) + w = u + (v + w)$ — Assoziativität

(4) Es existiert ein Element $0 \in V : \ \forall u \in V : u + 0 = u$

(5) $\forall u \in V \ \exists (-u) \in V : \ u + (-u) = 0.$

(6) $\forall u \in V \ \forall c \in \mathbb{K} : \ cv \in V$ — Abgeschlossenheit von $\cdot$

(7) $\forall u, v \in V \ \forall c \in \mathbb{K} : \ c(u + v) = cu + cv$

(8) $\forall u \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} : \ (c +_{\mathbb{K}} d)u = cu + du$

(9) $\forall u \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} : \ (c \cdot_{\mathbb{K}} d)u = c(du)$

(10) $\forall u \in V : \ 1_{\mathbb{K}} u = u.$

Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.