Untervektorraum

Ein **Unter(vektor)raum** eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, die folgende Eigenschaften besitzt

(1) $0 \in U$,

(2) $\forall u, v \in U: \; u + v \in U$,

(3) $\forall u \in U \, \forall c \in \mathbb{K}: \; cv \in U$.

Es gilt:

- Jeder Unterraum U eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist selbst ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.
- Sind U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$, so ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

$\Rightarrow$ Der Durchschnitt endlich vieler Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$

$$U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$$

ist wieder ein Unterraum von V.

Aufgespannter Untervektorraum

Es seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ beliebige Vektoren.

Für Skalare $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ heißt die Summe $\quad c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k$
eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$.

Der durch die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ **aufgespannte Unterraum** von V ist definiert durch

$$\operatorname{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) := \left\{ c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k \;\middle|\; c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\operatorname{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ heißt auch lineare Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Allgemeiner:

Die **lineare Hülle einer Teilmenge** $M \subseteq V$ ist der kleinste Unterraum von V, der M enthält. Sie ist definiert durch

$$\operatorname{Lin}(M) := \bigcap_{M \subseteq U,\, U \text{ Unterraum}} U$$

Offenbar gilt: $\operatorname{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) = \operatorname{Lin}(\{v_1, \ldots, v_k\})$.

Lineare Unabhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ heißt **linear abhängig**, falls es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt und Skalare $c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k$ mit

$$v_j = c_1 v_1 + \ldots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \ldots + c_k v_k \ .$$

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ heißt **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = 0$$

für die Skalare $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ nur die triviale Lösung $c_1 = \ldots = c_k = 0_{\mathbb{K}}$ besitzt.

Es gilt:

- Eine Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist linear unabhängig, wenn nicht linear abhängig, d.h. keiner der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ ist Linearkombination der übrigen.
- Eine Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots, k\}$:
  $\mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) = \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_k\})$.
- Eine Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $k \geq 2$, $v_1 \neq 0$, ist linear abhängig $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $j \in \{, \ldots, k\}$, so dass v_j Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{j-1}$ ist und die Menge $\{v_1, \ldots, v_{j-1}\}$ linear unabhängig ist.

Zusammenhang zu linearen Gleichungssystemen

Es sei $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

- $\boxed{\text{Sind } \{v_1, \ldots, v_k\} \text{ linear unabhängig ?}}$

$\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = 0$ hat nur die triviale Lösung $c_1 = \ldots = c_k = 0_{\mathbb{K}}$.

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{[v_1\ v_2\ \ldots\ v_k]}_{=:A} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0 \quad \text{hat nur die triviale Lösung.}$$

$\Leftrightarrow$ alle Spalten von A sind Pivotspalten (keine freien Variablen).

Zusammenhang zu linearen Gleichungssystemen

Es sei $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

- $\boxed{\text{Liegt } w \in \mathbb{R}^n \text{ in } \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\})\,?}$

$\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = w$ besitzt für $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ eine Lösung.

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{[v_1\ v_2\ \ldots\ v_k]}_{=:A} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = w \quad \text{ist lösbar.}$$

$\Leftrightarrow$ die letzte Spalte von $[A|w]$ ist keine Pivotspalte.