# Basis eines Vektorraumes

Eine Menge von Vektoren $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eines Vektorraumes $V$ heißt **Basis** von $V$, wenn gilt:

(B1) die Menge von Vektoren $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist linear unabhängig,

(B2) $V = \mathrm{Span}(\{b_1, \ldots, b_n\})$.

**Basisauswahlsatz:**
Für jeden Unterraum $U = \mathrm{Span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) \subseteq V$, $U \neq \{0\}$ läßt sich eine Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_k\}$ auswählen, die eine Basis von $U$ ist.

**Koordinatensystem bzgl einer Basis:**

Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ mit $v = c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n$.

**Koordinatenvektor** von $v$ bzgl. $\mathcal{B}$: $[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

# Basis eines Vektorraumes

Es gilt:

- Die Koordinatenabbildung $\mathcal{F}_\mathcal{B} : V \to \mathbb{K}^n,\ v \mapsto [v]_\mathcal{B}$ ist ein Isomorphismus.
- Alle Basen eines Vektorraums $V$ haben dieselbe Anzahl Elemente.

$\Leftrightarrow$ Hat $V$ eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, so ist jede Menge aus mehr als $n$ Vektoren in $V$ linear abhängig und keine Menge aus weniger als $n$ Vektoren spannt ganz $V$ auf.

Die **Dimension eines Vektorraumes** $V$:

- Ist $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$, so ist dim $V$:=n.
- $\dim \{0\} := 0$.
- Hat $V$ keine endliche Basis, so heißt $V$ unendlich-dimensional.

**Basisergänzungssatz:**

Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum von $V$ und $\dim V = n$, so kann jede Menge linear unabhängiger Vektoren aus $U$ zu einer Basis von $U$ erweitert werden, und es gilt $\dim U \leq \dim V$.

Ist $\dim V = n$, so ist jede Menge von $n$ linear unabhängigen Vektoren und jede aufspannende Menge von $n$ Vektoren in $V$ eine Basis.

# Basiswechsel

Gegeben sind Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\}$ eines Vektorraumes $V$.

| Für einen Vektor $v \in V$ seien die Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}}$ gegeben und $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ gesucht. |
|---|

Berechnen die Koordinatenvektoren der alten Basis $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & a_{11}\tilde{b}_1 + \ldots + a_{1n}\tilde{b}_n \\ & \vdots & \\ b_n & = & a_{n1}\tilde{b}_1 + \ldots + a_{nn}\tilde{b}_n \end{array}$$

Dann gilt:

$$[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=: W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Die Matrix $W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$ heißt **Basiswechselmatrix**. Es gilt: $W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = W_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$.

# Basiswechsel

**Speziell** für $\boxed{V = \mathbb{R}^n}$ und Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\}$ in $V$:

Berechnen die Koordinatenvektoren der alten Basis $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$
\begin{array}{rcl}
b_1 & = & a_{11}\tilde{b}_1 + \ldots + a_{1n}\tilde{b}_n \\
 & \vdots & \\
b_n & = & a_{n1}\tilde{b}_1 + \ldots + a_{nn}\tilde{b}_n
\end{array}
$$

bedeutet die Matrixgleichung $(A \cdot X = B)$

$$
\underbrace{[\,\tilde{b}_1 \ldots \tilde{b}_n\,]}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{[\,b_1 \ldots b_n\,]}_{=B}
$$

zu lösen. Dies ist z.B. mit dem Gauss-Algorithmus möglich.