Spaltenraum und Kern einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$$

Spaltenraum von A: $\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Span}(\{a_1, \dots, a_n\})$.

Kern von A: $\mathrm{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

$\mathrm{Ker}(A)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

Es gilt:

- $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{K}^m$.
  Die Pivotspalten von A formen eine Basis von $\mathrm{Col}(A)$.
  Rang von A: $\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Col}(A)$.
- $\mathrm{Ker}(A)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{K}^n$.
  Ist $\{x \in \mathbb{K}^n \mid x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}\}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$ in parametrischer Vektorform, so ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(A)$.

Dimensionsformel: $\boxed{\mathrm{rg}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{n}}$

Lineare Abbildungen

Es seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear** oder **Homomorphismus**, falls

(1) $\forall u, v \in V : \; f(u+v) = f(u) + f(v)$.

(2) $\forall v \in V \, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \; f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

d.h.: $\boxed{\forall u, v \in V \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \; f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).}$

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt

- **injektiv**, falls $\forall u, v \in V, u \neq v : \; f(u) \neq f(v)$.
- **surjektiv**, falls $\forall w \in W \, \exists \, v \in V : \; f(v) = w$.
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv.

Der **Kern einer Abbildung** f ist $\mathrm{Ker}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

Das **Bild einer Abbildung** f ist $\mathrm{Im}(f) := \{w \in W \mid \exists \, v \in V : \; f(v) = w\} = f(V)$.

Es gilt:

- $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes V.
- $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes W.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Betrachten vorerst $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$.

Es sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung.

Für $x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ gilt: $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Da f linear ist, folgt: $\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n :\ f(x) = Ax \ \text{ mit } \ A := (f(e_1)\ f(e_2)\ \dots\ f(e_n)).}$

Es gilt:
Zu jeder linearen Abbildung (Homomorphismus) $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ existiert eine eindeutig bestimmte $(m \times n)$-Matrix A mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.

Die Matrix A heißt **Standardmatrix** von f.

Es gilt:

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$ und $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}(A)$.
- f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar.
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Es seien V und W Vektorräume der Dimensionen $\dim V = n$ und $\dim W = m$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bzw. $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_m\}$.

Es gilt:

Zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ existiert eine eindeutig bestimmte $(m \times n)$-Matrix A derart, dass für alle $v \in V$ gilt:

$$[f(v)]_{\mathcal{D}} = A\,[v]_{\mathcal{B}}.$$

Die Matrix A heißt **Darstellungsmatrix** von f **zu den Basen** $\mathcal{B}$ **und** $\mathcal{D}$.

Seien $V_1,\ V_2,\ V_3$ Vektorräume der Dimensionen $\dim V_i = n_i, i = 1, 2, 3$ über $\mathbb{K}$.
Die **Komposition** zweier linearer Abbildungen $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_3$

$$(g \circ f)(v) := g(f(v)) \quad \text{für alle } v \in V_1$$

ist dann wieder linear.
Gilt $f(v) = A_1 v$ und $g(w) = A_2 w$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ von $V_1,\ V_2, V_3$, dann:

$$(f \circ g)(v) = Av \ \text{ mit } A = A_2 \cdot A_1.$$

Darstellungsmatrix unter Basiswechsel

Basiswechsel:

Bei einem Wechsel der Basis ändert sich die Darstellungsmatrix von f.

Es seien $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\}$ und $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_m\}$ andere Basen in V bzw. W.

Seien $W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$ und $W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}}$ die zugehörigen Basiswechselmatrizen, dann gilt:

$$\forall v \in V : \; [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} \, [v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{und} \qquad \forall w \in W : \; [w]_{\tilde{\mathcal{D}}} = C_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \, [w]_{\mathcal{D}}$$

Folglich:

$$[f(v)]_{\tilde{\mathcal{D}}} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \, [f(v)]_{\mathcal{D}} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \, A \, [v]_{\mathcal{B}} = \underbrace{(W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \cdot A \cdot W^{-1}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}})}_{=\tilde{A}} \, [v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

Die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von f zu den Basen $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\tilde{\mathcal{D}}$ erfüllt die Beziehung

$$\tilde{A} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \cdot A \cdot W^{-1}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$$

Spezialfall: $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{D}}$. Dann gilt: $\tilde{A} = C \cdot A \cdot C^{-1}$
mit $C := W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$. Die Matrizen A und $\tilde{A}$ heißen zueinander **ähnlich**.