TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2012/13

Kurzlösungen für die Hausaufgaben

H4 Lösung durch Probe verifizieren!

H5 „$\Leftarrow$“: Gilt $f(v) = r \cdot v$, dann sind die Bedingungen $f(v+w) = r \cdot (v+w) \overset{VR-Axiom}{=} rv+rw = f(v) + f(w)$ sowie $f(\lambda v) = r(\lambda v) \overset{VR-Axiom}{=} \lambda \cdot rv = \lambda f(v)$ natürlicherweise erfüllt.

„$\Rightarrow$“: Es sei $v_0 \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gibt es offenbar eine reelle Zahl $r \in R$ mit $f(v_0) = rv_0$. Wir zeigen nun für ein beliebiges $v_1 \in V$, dass die Gleichung $f(v_1) = rv_1$ gilt: Da v_0 V erzeugt, existiert ein $s \in R$ mit $v_1 = sv_0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} rv_0 + f(v_1) =& f(v_0) + f(v_1) = f(v_0 + v_1) = f((1+s)v_0) = (1+s)f(v_0) = (1+s)rv_0 \\ =& rv_0 + rsv_0 = rv_0 + rv_1, \end{aligned}$$

also $f(v_1) = rv_1$. Da dies für alle $v \in V$ gilt, können wir $f(v) = rv$ folgern.

H6 Es seien $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4 \in R^n$ die Eckpunkte des Vierecks. Für die Seitenmittelpunkte $\vec{x}_i$ der Strecken $\vec{p}_i\vec{p}_{i+1}$ ergibt sich $\vec{x}_i = 1/2(\vec{p}_i + \vec{p}_{i+1})$ (Dabei werden die Indizes ($\mod 4$) gerechnet). Für die Seiten $s_{i,i+1}$ des Vierecks $\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3\vec{x}_4$ ergibt sich

$$s_{i,i+1} = \{\vec{x}_i + r_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \mid r_i \in [0,1]\} = \{1/2(\vec{p}_i + \vec{p}_{i+1}) + r_i(1/2(\vec{p}_{i+2} - \vec{p}_i)) \mid (r_i \in [0,1])\}.$$

Damit sind die Richtungsvektoren von $s_{1,2}$ und $s_{3,4}$ bzw. von $s_{2,3}$ und $s_{4,1}$ jeweils entgegengesetzt, d.h. Vielfache voneinander. Außerdem folgt durch obige Formel sofort

$$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = |\vec{x}_3 - \vec{x}_4| = (1/2(|\vec{p}_3 - \vec{p}_1|)) \text{ und } |\vec{x}_2 - \vec{x}_3| = |\vec{x}_4 - \vec{x}_1| = (1/2(|\vec{p}_4 - \vec{p}_2|)).$$

H10 Folgende Matrizenprodukte sind definiert:

$$AA = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix}, \quad DC = (-57)$$

H11 (a) $r = 2$, $s = -3$

(b)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

H12 (a) i. Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii. Gegenbeispiel:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $BA = 0 \implies (AB)^2 = 0$ ist eine wahre Aussage.

(b) i. Die dritte Spalte von AB ist ebenfalls gleich der Summe der ersten beiden Spalten.

ii. Die zweite Spalte von AB ist ebenfalls eine Nullspalte.

H16. Lösung durch Probe verifizieren.

H17. (a) Nachrechnen!

(b) $k = 9$

H18. (a) $\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^{m}(AA^T)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(A^T)_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(A)_{ij} = sq(A)$.

(b) $(B^TAB)^T = B^TA^T(B^T)^T \overset{A^T=A}{=} B^TAB$

H22. Ja, 40% M_1, 10% M_2, 50% M_3

H23. Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme durch Probe verifizieren. Die Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich aus der Lösung des homogenen durch Addition einer partikulären Lösung.

H24. (a)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & \lambda & -\mu \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -\mu-5 \end{array}\right) \curvearrowright \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \mu+5 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Fall: } \lambda - 1 \neq 0}$ d.h. falls $\lambda \neq 1$ ist das LGS eindeutig lösbar:

$\underline{\underline{x_3 = \frac{\mu+5}{1-\lambda}}},$

$$x_2 = \frac{\mu+5}{1-\lambda} - 7 = \frac{\mu+5-7(1-\lambda)}{1-\lambda} = \underline{\underline{\frac{\mu+7\lambda-2}{1-\lambda}}}, \quad \underline{\underline{x_1 = 2}}$$

$\boxed{\text{Falls } \lambda - 1 = 0 \text{ und } -\mu - 5 = 0}$ d.h. falls $\lambda = 1 \wedge \mu = -5$ ist das LGS lösbar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& 2 \\ x_2 &=& t-7 \\ x_3 &=& t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Falls } \lambda - 1 = 0 \text{ und } -\mu - 5 \neq 0}$ d.h. $\lambda = 1 \wedge \mu \neq -5$ LGS nicht lösbar!

(b) LGS nur lösbar für $\lambda = -6$.Lösung durch Probe verifizieren.

H28. (a) A ist für $a \notin \{0, 1\}$ invertierbar. Lösung durch Probe verifizieren.

(b) Für $a \notin \{0, 1\}$ gilt $x = A^{-1}b = \frac{1}{a(a-1)}(a^2, -a, (r-1)(a-1))^T$,
für $a = 0$ folgt $r = 1$ und $x = \{(0, 1, t)^T | t \in R\}$ und
für $a = 1$ existiert keine Lösung.

H29. Nachrechnen! Wenn o.B.d.A P nicht invertierbar ist, kann P durch geeignete Zeilenumformungen in eine eine Nullzeile enthaltende Matrix überführt werden. Durch Anwendung der selben Zeilenumformungen auf die Blockmatrix ergibt sich dort auch eine Nullzeile, d.h. sie ist ebenfalls nicht invertierbar.

oder: Ist P oder Q nicht invertierbar, dann hat A keinen Vollrang (weniger als n lin. unabhängige Zeilvektoren) und kann deshalb nicht invertiert werden.

H30. (a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für alle $a \neq 2$ invertierbar.

Inverse für $a = 3$ durch Probe verifizieren.

(b) Durch $A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} = B$ ist ein Gleichungssystem (mit sechs Variablen) definiert, dessen Lösungsmenge (mit zwei freien Variablen) durch Probe leicht verifiziert werden kann.

H34. (b) $U^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $U^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

H35. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5 \end{pmatrix}$

Für die Berechnung von U (Herstellung einer ZSF) werden 4 Multiplikationen, für die Berechnung von L ebenso viele (Multiplikation von 4 Elementarmatrizen) benötigt.

Wir finden $y = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 13 \\ 9.75 \\ 16 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} 19 \\ 23 \\ 24 \\ 19 \\ 14 \end{pmatrix}$ als Lösungen der Gleichungssysteme $Ly = b$ bzw. $Ux = y$. Dazu werden 4 bzw. 5 Multiplikationen benötigt. Insgesamt sind das 17 Multiplikationen im Vergleich zu maximal $2n^3 = 432$ bei Berechnung der Inversen. (Bei dieser konkreten Matrix werden allerdings nicht alle Multiplikationen tatsächlich ausgeführt, Multiplikationen mit 0 oder 1 werden ja nicht gezählt). A^{-1} durch Probe verifizieren!

H36. $(\mathfrak{P}(A), \triangle)$ ist eine abelsche Gruppe:

(a) Dass $\triangle$ eine Operation ist, folgt daraus, dass es eine Komposition von Operationen in $\mathfrak{P}(X)$ ist, nämlich $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Kommutativität ist offensichtlich, der Beweis der Assoziativität ist formal aufwendig.

(b) Das neutrale Element der Gruppe ist $\emptyset$, das Inverse zu $X \subseteq A$ ist X (nachrechnen)

Die VR-Eigenschaften gelten:

(c) Assoziativität: $(\lambda \cdot \mu)X = \lambda(\mu \cdot X)$:
Für $\mu = 0$ haben wir $0 \cdot X \overset{\text{Def.}}{=} \emptyset \overset{\text{Def.}}{=} \lambda\emptyset$.
Für $\mu = 1$ ergibt sich $\lambda X \overset{\text{Def.}}{=} \lambda(1 \cdot X)$.
Damit gilt die Assoziativität für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}(2)$ und $X \in \mathfrak{P}(A)$.

(d) Distributivität: $(\lambda + \mu)X = \lambda X \triangle \mu X$:
Für $\mu = 0$ ergibt sich $\lambda X = \lambda X \triangle 0 \cdot X \overset{\text{Def.},Neu_0}{=} \lambda X$. Neu_0 bezeichnet das Axiom über die Existenz des neutralen Elements in der abelschen Gruppe $(\mathfrak{P}(A), \triangle)$. Analog ist der Fall $\lambda = 0$.
Für $\mu = \lambda = 1$ ergibt sich $0 \cdot X = \lambda X \triangle \lambda X = X \triangle X = \emptyset$.
Damit gilt die Distributivität für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}(2)$ und $X \in \mathfrak{P}(A)$.

(e) Distributivität: $\lambda(X \triangle Y) = \lambda X \triangle \lambda Y$:
Für $\lambda = 0$ ergibt sich $\emptyset = \emptyset$.
Für $\lambda = 1$ ergibt sich $X \triangle Y = X \triangle Y$. Damit gilt die Distributivität für alle $\lambda \in \mathbb{Z}(2)$ und $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$.

(f) Die Neutralität der 1 des Körpers ergibt sich nach Definition.

H40. (a) Die Polynome sind lin. unabh.: Aus $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2t + \lambda_3 \cdot (-2+4t^2) + \lambda_4 \cdot (12t - 8t^3) = o$ folgt

$$1 \cdot (\lambda_1 - 2\lambda_3) + t \cdot (2\lambda_2 + 12\lambda_4) + t^2 \cdot (4\lambda_3) + t^3 \cdot (-8\lambda_4).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$.
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -\frac{3}{2}$.

(b) Alle null-, ein- und zweielementigen Mengen von Vektoren sind linear unabhängig, das sind insgesamt 11 Mengen.

H41. (a) UVR

(b) UVR

(c) kein UVR.

(d) UVR

H42. (a) Schreibe die Vektoren als Spaltenvektoren einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \curvearrowright \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = v_2 + v_4 \implies v_1 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_1\})$
$v_2 = v_1 - v_4 \implies v_2 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_2\})$
$v_3 = v_6 - v_2 \implies v_3 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_3\})$
$v_4 = v_1 - v_2 \implies v_4 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_4\})$
$v_5 = v_2 - v_3 \implies v_5 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_5\})$
$v_6 = v_2 + v_3 \implies v_6 \in \mathrm{Span}(M \setminus \{v_6\})$

Sowohl v_2 als auch v_3 lassen sich als Linearkombination aus v_5, v_6 darstellen.
Also gilt: $\mathrm{Span}(\{v_2, v_5, v_6\}) = \mathrm{Span}(\{v_3, v_5, v_6\}) = \mathrm{Span}(\{v_5, v_6\})$.

(b) Mit $\alpha = -3$ gilt $u = 3w_1 - 2w_2$.

H46. Aus der Zeilenstufenform ist ersichtlich, dass $\{v_1, \ldots, v_5\}$ nicht linear unabhängig ist. Somit ist $E := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$.
$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$ mit $B \subseteq E$, die Dimension ist 3.

H47. Die Behauptung soll auch für unendliche Mengen B bewiesen werden.

„$\Rightarrow$“: Es ist klar, dass B ein Erzeugendensystem von V ist. Um zu zeigen, dass B minimal ist, nehmen wir an, $B' \subseteq B$ sei ein Erzeugendensystem. Falls es einen Vektor $v \in B \setminus B'$ gibt, dann kann man v als Linearkombination von Vektoren aus B' darstellen. Wenn man von dieser Linearkombination v subtrahiert, dann hat man eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors aus Vektoren von B. Dies ist ein Widerspruch, somit ist $B \setminus B' = \emptyset$.

„$\Leftarrow$“: Es muss gezeigt werden, dass B lin. unabh. ist. Wir nehmen an, dass B linear abhängig ist. Dann gibt es eine nichtriviale Darstellung des Nullvektors aus Vektoren von B. Deshalb existiert ein Vektor $v \in B$, so dass $v \in \operatorname{Span}\big(B \setminus \{v\}\big)$ gilt, genauer gesagt können wir dann $v = \sum_{b_i \in B\setminus\{v\}} \lambda_i b_i$ für geeignet gewählte λ_i schreiben. Dann ist $B\setminus\{v\}$ ein Erzeugendensystem, denn für einen beliebigen Vektor $w \in V$ kann die Linearkombination $w = \sum_{b_i \in B\setminus\{v\}} \mu_i b_i + \mu_v v$ durch $w = \sum_{b_i \in B\setminus\{v\}} \mu_i b_i + \mu_v \sum_{b_i \in B\setminus\{v\}} \lambda_i b_i =$ ersetzt werden. Dies widerspricht der Minimalität von B.

H48. (a) 8

(b) Die Beweise, dass die Menge lin. unabh. und ein Erzeugendensystem ist, sind beide trivial.

(c) Der erste Teil ist wieder trivial, die Menge E selbst ist natürlich nicht lin. unabh., schon allein deshalb, da jede lin. unabh. Menge höchstens drei Elemente hat (das folgt aus Teil (b)).

(d)

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\} \\ M_2 &:= \{(0,0,0),(0,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\} \\ M_3 &:= \{(0,0,0),(0,0,1)\} \end{aligned}$$

H52. (a) Der Rang von A ist 3.

(b) Die Dimension des Kerns ist 1. Eine Basis des Kerns von $\mathbf{A}$ ist $(4,3,2,1)^T$.

(c) Der Kern hat 5 Elemente (durch Probe verifizieren!)

H53. (a) $f(\binom{2}{6}) = \binom{6}{2}, \quad f(\binom{0}{3}) = \binom{3}{6}, \quad f(\binom{2}{7}) = \binom{7}{4}$.

(b) $ker(f) = \binom{0}{0}$, $im(f) = R^2$.

(c) $M_B^B(f)$ durch Probe verifizieren.

H54. (a) Wähle z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt $\dim(\ker(A)) = 1$, denn $\binom{-1}{1} \in \ker(A)$, aber es gilt $\mathrm{Col}(A) = R$. Wegen $\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\ker(A)) = n$ muss $m < n$ gelten.

(b) Wähle z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann gilt $\dim(\ker(A)) = 0$, aber z.B. $\binom{0}{1} \notin \mathrm{Col}(A)$. Wegen $\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\ker(A)) = n$ muss $m > n$ gelten.

(c) „ $\Rightarrow$ “:
„ $\Leftarrow$ “: Gilt $\ker(A) = o$ für eine quadratische Matrix A, dann ist A invertierbar, also existiert zu jedem $b \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor $x(= A^{-1}b)$ mit $Ax = b$.

H58. (a) Nachrechnen. Die Bijektivität von f erhält man schnell, wenn man bemerkt, dass $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z \cdot (-i)$ die zu f inverse Abbildung ist.

(b) $f(e_1) = 1 \cdot i = i = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2, \qquad f(e_2) = i \cdot i = -1 = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$

$A := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) u_1 und u_2 sind zwei lin. unabh. Vektoren eines zweidimensionalen Vektorraums, bilden also eine Basis.

Im Hinblick auf die restlichen Teile bestimmen wir die Matrizen $M_{B'}^B(id)$ und $M_B^{B'}(id)$:

Es gilt $M_B^{B'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $M_{B'}^B(id) = (M_B^{B'}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}$

Damit finden wir $A' = M_{B'}^{B'}(f) = M_{B'}^B(id) \cdot M_B^B(f) \cdot M_B^{B'}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Aus dieser Matrix kann man ablesen, dass $f(u_1) = -0.5u_2$ und $f(u_2) = 2u_1$ gilt. Man kann leicht nachrechnen, dass das stimmt.

(d) Es gilt $z = 5 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$. Es gilt $A\binom{5}{1} = \binom{-1}{5}$, d.h. $f(z) = -1e_1 + 5i$.

$M_{B'}^B(id)\binom{5}{1} = \binom{3}{1}$, d.h. $z = 3 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$.

$M_{B'}^B(id)\binom{-1}{5} = \binom{2}{-1.5}$, d.h. $f(z) = 2 \cdot u_1 - 1.5 \cdot u_2$.

Wenn man z bez. B' abbildet, dann erhält man $A'\binom{3}{1} = \binom{2}{-1.5}$

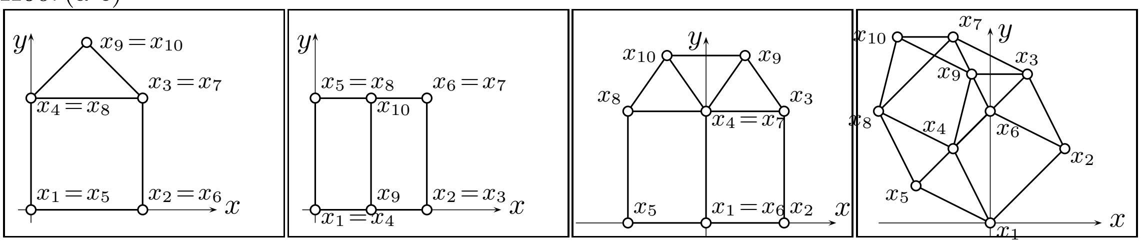
(e) $Av = \binom{-\lambda_2}{\lambda_1}, \qquad A'v = \binom{2\lambda_2}{-0.5\lambda_1}$

(f) $M_B^{B'}(f) = M_B^B(f) \cdot M_B^{B'}(id) = M_B^{B'}(id) \cdot M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$M_{B'}^B(f) = M_{B'}^B(id) \cdot M_B^B(f) = M_{B'}^{B'}(f) \cdot M_{B'}^B(id) = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.25 \end{pmatrix}$.

H59. Als Figur erhält man einen Tannenbaum, der um 45° nach links geneigt ist.

H60. (a-c)



(d) $Q = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

H64. $\det(G_1) = 5^{5-2} = 125, \quad \det(G_2) = 0, \quad \det(G_3) = 6^{6-2} = 1296$

H65. (a) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -2 \implies \det\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} = -2,$

$$\det\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3f \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = 24, \quad \det\begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i-6c & h-3b & g-3a \end{pmatrix} = 4$$

(b) $\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = -16\,i$

H66. Alle 4 Matrizen A, B, C, D existieren nicht.

H70. Genau ein Eigenwert existiert für $|a| = 2|b|$.

1. Fall: $a = 2b$: Dann folgt $A - (\frac{3}{2}a \cdot E) = \begin{pmatrix} -b & -b \\ b & b \end{pmatrix}$. Der Kern dieser Matrix ist der zugehörige Eigenraum: $E_{M_1}(\frac{3}{2}a) = \{t\binom{1}{-1} \mid t \in R\}$.

2. Fall: $a = -2b$: Dann folgt $A - (\frac{3}{2}a \cdot E = \begin{pmatrix} b & -b \\ b & -b \end{pmatrix}$. Der Kern dieser Matrix ist der zugehörige Eigenraum: $E_{M_2}(\frac{3}{2}a) = \{t\binom{1}{1} \mid t \in R\}$.

3. Fall: $a = b = 0$: Dann folgt $A - (\frac{3}{2}a \cdot E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Der Kern dieser Matrix ist der zugehörige Eigenraum: $E_{M_3}(\frac{3}{2}a) = R^2$.

H71. (a) $p_1(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = \frac{1}{2}(x-1)^4$

(b) $p_2(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-i)(x+i)$

(c) $p_4(x) = x^5 - 3x^3 + 2x = x(x^4 - 3x^2 + 2) = x(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

H72. Für $n = 1$ ist Null der einzige Eigenwert.

Für $n \geq 2$ ist offenbar $\lambda_1 = -1$ ein $n-1$-facher Eigenwert von A. Außerdem ist $\lambda_2 = n-1$ ein einfacher EW.

H76. (a) Die Eigenwerte sind 0 (alg. VFH 2, geom. VFH 1) und 1 (alg. VFH 1, geom. VFH 1).

(b) nein

(c) $\det(M) = 0$.

(d) nein, der Rang von M ist 2.

(e) $\operatorname{Ker}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$

(f) nein

(g) M^{-1} existiert nicht.

H77. (a) Die EW sind 1 und -1. Die Eigenräume sind die Gerade g selbst (1) bzw. die Senkrechte auf g durch den Nullpunkt (-1).

(b) $A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$.

(c) $D = M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) S muss von der Basis B' in die Basis B transformieren, d.h. $S = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $S^{-1} = \frac{1}{5}S$. Die Matrix S ist nicht eindeutig, denn man könnte u_1 und u_2 skalieren.

Man hätte in der Basis B' die Vektoren u_1 und u_2 auch in der anderen Reihenfolge nehmen können. Dann wäre $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Spalten von S (bzw. Zeilen von S^{-1}) wären vertauscht.

H78. A ist nicht diagonalisierbar nur für $a = -2$.

H82. **Eine** Orthonormalbasis ist: $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0)^T,\ \frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0)^T,\ \frac{1}{\sqrt{10}}(1,1,-2,-2)^T\}$.

H83. $p_{u_1,u_2}(v) = \frac{u_1\cdot v}{|u_1|^2}u_1 + \frac{u_2\cdot v}{|u_2|^2}u_2 = \frac{88}{66}u_1 + \frac{-2}{6}u_2 = \frac{1}{3}(-27,3,18)^T = (-9,1,6)$. Also liegt v in der von u_1 und u_2 aufgespannten Ebene.

H84. (a) Eigenwerte: $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \lambda_3 = \frac{3}{4}$; $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{16} & \frac{3}{32} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = (1,0,0)^\top$,

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 \\ 4 & 16 & 16 \end{pmatrix}$ (Spalten sind Eigenvektoren), $S^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -64 & 64 & -12 \\ 8 & -10 & 6 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

Für $k \geq 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+1} \\ t_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right) b.$$

(b) Wegen $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ fällt der erste Summand weg. Es sei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf der Hauptdiagonalen. Es gilt

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i\right) = S \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} D^i\right)}_{=:X_k} S^{-1}.$$

Die Matrix X_k hat Diagonalgestalt, die Einträge auf der Hauptdiagonalen lauten $\frac{1-\lambda_j^k}{1-\lambda_j}$ für $j \in \{1,2,3\}$. Dann ist t_k der Eintrag unten links in SX_kS^{-1}.

$$t_k = -32(1-0.5^k) + \frac{32}{3}(1-0.25^k) + 32(1-0.75^k)$$

(c) Wir benutzen die Formel von oben. Wegen $-1 < \lambda_j < 1$ für $j \in \{1,2,3\}$ konvergiert A^k gegen die Nullmatrix. Somit hängt der Grenzwert für t_k nicht von t_0, t_1, t_2 ab. Die Folge konvergiert gegen $\frac{32}{3}$.