TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2012/13

10. Übungsblatt für die Übungen vom 17.12.-21.12.2012

Darstellungs- und Basiswechselmatrizen

Ü55. Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α dreht.

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A = M_B^B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B := E_2$ von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um 45° bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

Ü56. Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung gegeben ist. Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität. Geben Sie die darstellende Matrix, den Kern und das Bild von f an. Liegt der Vektor $(0,-3,3)^T$ im Kern von f?

Ü57. Die Mengen $E := E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ und $H = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$, $F := E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ und $G = \{(1,1),(1,3)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_H^E(\mathrm{id})$ und $M_E^H(\mathrm{id})$ und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$. Verifizieren Sie, dass durch jede der Matrizen der Vektor $(10,9,8)$ auf den Vektor $(19,17)$ abgebildet wird.

Hinweis: Mit $M_D^B(g)$ bezeichnen wir die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $g : V \to W$ bezüglich der Basen B in V und D in W. Die Abbildung id ist die identische Abbildung, eine Darstellungsmatrix $M_D^B(\mathrm{id})$ ist also eine Basiswechselmatrix (von der Basis B in die Basis D).

H58. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z \cdot i$ ein Automorphismus (d.h. ein Isomorphismus auf sich selbst) des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist.

(b) Die komplexen Zahlen $e_1 := 1$ und $e_2 := i$ bilden eine Basis B des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A = M_B^B(f)$.

(c) Die komplexen Zahlen $u_1 := 1 + i$ und $u_2 := 2 - 2i$ bilden auch eine Basis B' von $\mathbb{C}$ (warum?). Wie lautet die Darstellungsmatrix $A' := M_{B'}^{B'}(f)$ bezüglich dieser Basis?

(d) Es sei $z := 5+i$. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von z und von $f(z)$ bezüglich der Basen $B = (e_1, e_2)$ und $B' = (u_1, u_2)$.

(e) Berechnen Sie Av bzw. $A'v$ für den Koordinatenvektor $v = \binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ von z bezüglich B bzw. B' und vergleichen Sie mit den Koordinatenvektoren von $f(z)$.

(f) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_B^{B'}(f)$ und $M_{B'}^{B}(f)$.

H59. Verbinden Sie die Punkte der Ebene, deren Koordinaten durch die Spaltenvektoren der nachstehenden Matrix gegeben sind, in der Reihenfolge dieser Spalten.

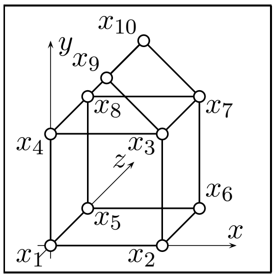
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -1 & -11 & -11 & -8 & -9 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 8 & 11 & 11 & 1 & 4 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie ändert sich die Figur, wenn auf alle Spaltenvektoren die lineare Abbildung

$$f_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

angewendet wird?

H60. Hinweis: Zur Lösung dieser rechenintensiven Aufgabe können Sie ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.
Gegeben sei die rechts im Diagramm skizzierte Figur F mit den Punkten



$x_1 = (0,0,0)^T, x_2 = (1,0,0)^T, x_3 = (1,1,0)^T, x_4 = (0,1,0)^T,$
$x_5 = (0,0,1)^T, x_6 = (1,0,1)^T, x_7 = (1,1,1)^T, x_8 = (0,1,1)^T,$
$x_9 = (0.5,1.5,0)^T, x_{10} = (0.5,1.5,1)^T.$

(a) Skizzieren Sie den Aufriss der Figur, d.h. die Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Die Basis $B_G = \{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,-1,0)^T\}$ überführt die Figur in den Grundriss. Berechnen Sie den Grundriss, in dem Sie die zugehörige Basiswechselmatrix G bestimmen und die Produkte $G \cdot x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, 10\}$ berechnen. Skizzieren Sie die Projektion der Figur in die x-y-Ebene und überlegen Sie, ob ihr Ergebnis stimmt.

(c) Die Basen

$$B_L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

liefern eine Darstellung von vorn links bzw. eine isometrische Perspektive. Berechnen Sie analog zu (b) die Bilder der Punkte $x_1, \dots, x_{10}$ unter den induzierten Basiswechselmatrizen L bzw. S, projizieren Sie die Ergebnisse in die x-y-Ebene und vergleichen Sie mit Ihrer Anschauung.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix Q, die die Koordinaten bezüglich B_S in die Koordinaten bezüglich B_L überführt. Verifizieren Sie ihr Ergebnis durch folgende beide Möglichkeiten der Probe:

(1) Berechnung der Bilder $Q \cdot y_i$, dabei seien die y_i die Koordinaten der Punkte aus F bezüglich B_L (d.h. $y_i = L \cdot x_i$).

(2) Durch Berechnung von $L \cdot S^{-1}$. (Warum ist das gleich Q?)