TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2012/13

11. Übungsblatt für die Übungen vom 7.1.-11.1.2013

Determinanten

Ü61. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_1^T, A_1^2, A_2, A_2^{-1}, $2A_2$, $(A_1A_2)^{-1}$, A_3.

(b) Überführen Sie die Matrix B mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix und ermitteln Sie deren Determinante.

(c) Welchen Wert hat die Determinante der Matrix C?

Ü62. Gegeben sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(i) Die Vektoren v_1, v_2 seien die Spalten der Matrix A. Geben Sie $\det(A)$ an. Berechnen Sie den Flächeninhalt F_1 des Parallelogramms, das durch die beiden Vektoren v_1, v_2 in $\mathbb{R}^2$ aufgespannt wird.

(ii) Sei $w_1 := Mv_1$ und $w_2 := Mv_2$ und die Matrix B habe als Spalten die Vektoren w_1, w_2. F_2 sei die Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren w_1, w_2 in $\mathbb{R}^2$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass $F_2 = \det(M) \cdot F_1$ gilt.

Ü63. Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^T)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ gilt, falls A invertierbar ist.

(c) Es seien n ungerade und $A = -A^T$. Bestimmen Sie die Determinante von A.

Hinweis: Sie können zum Beweis die Gleichung $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$ verwenden.

H64. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

H65. (a) Es sei $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit $\det(M) = -2$. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i - 6c & h - 3b & g - 3a \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A über $\mathbb{Z}_5$ und die Determinante der komplexen Matrix C.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

H66. Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren.