TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2012/13

12. Übungsblatt für die Übungen vom 14.1.-18.1.2013

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ü67. Bestimmen Sie die Nullstellen der Polynome $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ und $q(x) = x^6 + x^4 - 16x^2 - 16$.

Hinweis: Es sei $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_i $(i = 0, \ldots, n)$ und $a_n = 1$, dann ist jede ganzzahlige Nullstelle von $p(x)$ Teiler von a_0.

Ü68. (a) Es sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $v_1 = (1,1)$ ein Eigenvektor von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $E_M(\lambda_2)$.

(b) Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ü69. Sei $p(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$ das charakteristische Polynom einer Matrix A. Zeigen Sie:

(a) $c_0 = \det(A)$.

(b) A ist invertierbar genau dann, wenn $k = 0$ kein Eigenwert von A ist.

(c) Ist A invertierbar und k ein Eigenwert von A, dann ist $\frac{1}{k}$ ein Eigenwert von A^{-1}. Wie stehen die zugehörigen Eigenvektoren in Beziehung?

(d) Die Eigenwerte von A und A^T sind gleich.

H70. Wie müssen die reellen Parameter a und b gewählt sein, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & 2a \end{pmatrix}$ genau einen reellen Eigenwert hat? Geben Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums in Abhängigkeit von a und b an.

H71. Finden Sie alle Nullstellen der angegebenen Polynome. Ermitteln Sie zuerst die ganzzahligen Nullstellen.

(a) $p_1(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

(b) $p_2(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$

(c) $p_4(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$

H72. Gesucht sind alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$