



### 13. Übungsblatt für die Übungen vom 21.1.-25.1.2013

#### *Eigenräume, Diagonalisierung von Matrizen*

Ü73. Entscheiden Sie, jeweils für die Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , ob die Matrizen  $A, B, C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$  diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ü74. (a) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen  $A$  alle Eigenwerte, finden Sie jeweils eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  und eine invertierbare Matrix  $S$ , so dass  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie jeweils die Matrix  $S^{-1}AS$  an.

$$(i) \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Von den folgenden Matrizen  $M$  sind die angegebenen Eigenvektoren bekannt. Geben Sie jeweils alle Eigenwerte und die Dimension der zugehörigen Eigenräume an. Sind diese Matrizen diagonalisierbar?

$$\bullet \quad M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \quad M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ü75. Die Drehung  $d_\alpha$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  um den Koordinatenursprung mit dem Winkel  $\alpha$  ist eine lineare Abbildung, die durch die Darstellungsmatrix  $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  beschrieben wird (siehe Skript zur 10. Vorlesung).

- (a) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und deren Eigenräume. Für welche Winkel  $\alpha$  ist  $d_\alpha$  diagonalisierbar?
- (b) Berechnen Sie alle Eigenwerte in  $\mathbb{C}$  und deren Eigenräume. Bestimmen Sie eine zu  $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha)$  ähnliche Diagonalmatrix  $D$  und eine geeignete Matrix  $S$  von Eigenvektoren und verifizieren Sie die Gleichung  $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha) = SDS^{-1}$ .

H76. Es sei  $M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$  eine Matrix über dem Körper  $\mathbb{C}$ . Die Vektoren  $v_1 = (i, -1, 1)^T$ ,  $v_2 = (i, 0, 1)^T$  sind Eigenvektoren der Matrix  $M$ .

- (a) Welche Eigenwerte hat die Matrix  $M$  und welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume?

- (b) Bilden die Basisvektoren der Eigenräume eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bzw. des  $\mathbb{C}^3$ ?
- (c) Welchen Wert hat die Determinante von  $M$ ?
- (d) Sind die Spaltenvektoren der Matrix  $M$  linear unabhängig und welchen Rang hat  $M$ ?
- (e) Geben Sie den Kern von  $M$  an.
- (f) Durch die Matrix  $M$  ist eine lineare Abbildung gegeben. Ist diese Abbildung injektiv?
- (g) Welche Eigenwerte hat  $M^{-1}$ ?

H77. Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Spiegelung an der Geraden  $g = \mathbb{R}v$  mit  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung geometrisch und überlegen Sie damit, welche Eigenwerte  $f$  hat und was die dazugehörigen Eigenräume sind. Geben Sie eine Basis  $B' = (u_1, u_2)$  von  $\mathbb{R}^2$  aus Eigenvektoren von  $f$  an.
- (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $A := M_B^B(f)$  bzgl. der Standardbasis  $B = (e_1, e_2)$ .
- (c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $D := M_{B'}^{B'}(f)$  bzgl. der Basis  $B' = (u_1, u_2)$ .
- (d) Berechnen Sie eine reguläre Matrix  $S$ , so dass  $D = S^{-1}AS$  gilt. Ist  $S$  eindeutig bestimmt?

H78. Für welche Parameterwerte  $a \in \mathbb{R}$  ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? Untersuchen Sie dazu die Dimension der entsprechenden Eigenräume in Abhängigkeit von  $a$ .