Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2012/13

14. Übungsblatt für die Übungen vom 28.1.-1.2.2013

Skalarprodukte, Orthogonalität

Ü79. (a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(k, k, 1)^T$ und $(k, 5, 6)^T$ zueinander orthogonal?

(b) Für welche $k \in \mathbb{R}$ gilt für die Vektoren $u = (1, 1, 0, -2)^T$ und $v = (3, -1, 1, k)^T$ die Beziehung $\operatorname{dist}(u, v) = 5$?

(c) Bilden die Vektoren $v_1 := (1, 0, 1)^T$, $v_2 := (-1, 4, 1)^T$, $v_3 := (2, 1, -2)^T$ eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$? Geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

(d) Es seien $u = (u_1, u_2)^T$ und $v = (v_1, v_2)^T$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die durch

$$u \bullet v := 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2$$

definierte Verknüpfung die Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt.

Ü80. Geben Sie zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ an, die die Norm 1 haben und zu den Vektoren $v_1 := (2, 1, -4, 0)^T$, $v_2 := (-1, -1, 2, 2)^T$, $v_3 := (3, 2, 5, 4)^T$ orthogonal sind.

Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ zum Untervektorraum $U := \operatorname{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ im Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

Ü81. (a) Zeigen Sie, dass der „Satz des Pythagoras": $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ für orthogonale Vektoren u, v auch im $\mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für Vektoren u, v aus dem $\mathbb{R}^n$ $\|u + v\| = \|u - v\|$ gilt, wenn u und v orthogonal sind.

H82. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, um aus den Vektoren

$$v_1 := (0, 2, 1, 0)^T, v_2 := (1, -1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 1, 1, 0)^T, v_4 := (1, 2, 0, -1)^T$$

eine Orthogonalbasis von $\operatorname{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ zu konstruieren. Normieren Sie diese Basis.

H83. Verifizieren Sie, dass die beiden Vektoren $u_1 = (-7, 1, 4)^T$ und $u_2 = (-1, 1, -2)^T$ orthogonal sind. Nutzen Sie dies aus, um die Orthogonalprojektion von $v = (-9, 1, 6)^T$ auf die durch u_1 und u_2 erzeugte Ebene zu berechnen.

H84. Eine Hefezellenkolonie benötigt in der k-ten Generation ($k \in \mathbb{N}$) eine Fläche von t_k cm^2. Das Wachstum der Kolonie sei gegeben durch die Gleichung

$$t_{k+3} = \frac{3}{2}t_{k+2} - \frac{11}{16}t_{k+1} + \frac{3}{32}t_k + 1, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ an, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} t_{k+3} \\ t_{k+2} \\ t_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+1} \\ t_k \end{pmatrix} + b.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? Wenn ja, so geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalform hat.

Hinweis für Bestimmung der Eigenwerte: „raten“ Sie, dass $\frac{1}{2}$ ein Eigenwert von A ist.

(b) Berechnen Sie den Flächenbedarf t_k für $k \in \mathbb{N}$ falls $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ ist.

(c) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge t_k (für $k \to \infty$)?

Bemerkung: In Teil (c) setzen wir nicht voraus, dass $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ gilt.