TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

2. Übungsblatt für die Übungen vom 22.10.-26.10.2012

Rechnen mit Matrizen

Ü7. Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Matrizenausdrücke: AB, BA, AD, $A(B+C)$, $AB + AC$, $A^T B^T$, $(BA)^T$, C^2, $D^T B$.

Ü8. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ü9. (a) Gegeben sei eine $m \times r$-Matrix A und zwei beliebige $r \times n$-Matrizen B und C über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $A(B+C) = AB + AC$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ gilt:
$AE_n = E_n A = A$ (E_n ist die Einheitsmatrix entsprechender Dimension),

(c) Zeigen Sie, dass für alle $m \times r$-Matrizen A und $r \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ gilt:
$(AB)^T = B^T A^T$ (A^T ist die zu A transponierte Matrix).

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Gegeben seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{R}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix},\quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},\quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

H11. (a) Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gibt es reelle Zahlen r und s, so dass $rA + sB = C$ gilt?

(b) (i) Geben Sie eine 3×3-Matrix $M_1 \neq 0$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_1 = M_1^T$ gilt.

(ii) Geben Sie eine 3×3-Matrix $M_2 \neq 0$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_2 = -M_2^T$ gilt.

(iii) Geben Sie 3×3-Matrizen M_1 und M_2 mit $M_1 = M_1^T$ und $M_2 = -M_2^T$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_1 + M_2 = A$ gilt (wobei A die in Ü7 gegebene Matrix ist).

H12. (a) Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) über $\mathbb{R}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0$

(iii) $BA = 0 \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0$

(b) Es seien A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?