TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

3. Übungsblatt für die Übungen vom 29.10.-2.11.2012

spezielle Matrizen

Hinweis: Die Übungen am Mittwoch, dem 31.10.2012, fallen wegen eines Feiertages aus. Bitte besuchen Sie ausnahmsweise eine Übung an einem anderen Wochentag. Bitte denken Sie daran, auf Ihre Hausaufgabe den Termin Ihrer Übung und Ihren Übungsleiter zu notieren, so dass eine Zuordnung zu Ihrer eigentlichen Gruppe möglich ist.

Ü13. Eine *Diagonalmatrix* $D = (d)_{ij}$ ist eine quadratische $n \times n$-Matrix, für die alle Einträge außerhalb der Diagonale gleich Null sind, d.h. es aus $i \neq j$ folgt $(d)_{ij} = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass Diagonalmatrizen *vertauschbar* sind, d.h. für beliebige $n \times n$-Diagonalmatrizen D_1, D_2 gilt $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

(b) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Produkte AD und DA. Beschreiben Sie, wie sich die Matrix A durch die jeweiligen Multiplikationen ändert.

(c) Es sei D eine $n \times n$-Diagonalmatrix. Finden Sie (unter Zuhilfenahme von (b)) eine Bedingung für D, so dass D vertauschbar mit beliebigen Matrizen A (von gleicher Größe) ist.

Ü14. Invertieren Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Überführen Sie die Matrizen A bzw. B durch Elementarumformungen in die Einheitsmatrix E_3. Multiplizieren Sie die den Umformungen entsprechenden Elementarmatrizen. Das Ergebnis sind die gewünschten inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1}. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, in dem Sie AA^{-1} und $A^{-1}A$ bzw. BB^{-1} und $B^{-1}B$ berechnen.

Ü15. (a) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A die Beziehung $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

(b) Es sei A eine Matrix. Zeigen Sie, dass AA^T eine symmetrische Matrix ist.

(c) Es sei A eine quadratische Matrix. Zeigen Sie, dass $A + A^T$ eine symmetrische Matrix ist.

Hinweis: Eine *symmetrische* Matrix ist eine quadratische Matrix M, für die $M^T = M$ gilt.

A16. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} dieser Matrix.

Hinweis: Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten für diese Aufgabe: Das Gauß-Verfahren, die in Ü14 vorgestellte Methode oder durch Lösung eines Matrix-Gleichungssystems ähnlich wie in Ü8.

H17. (a) Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind Pauli-Matrizen und werden für die Analyse des Elektronen-Spin in der Quantenphysik verwendet. Zeigen Sie, dass $A^2 = I$, $B^2 = I$ und $AB = -BA$ gelten.

(b) Es seien $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ gilt $AB = BA$?

H18. (a) Für eine quadratische Matrix A ist die Spur $\operatorname{tr}(A)$ von A als Summe der Hauptdiagonalelemente von A definiert. Die Summe der Quadrate aller Einträge einer (nicht notwendig quadratischen) Matrix A wird mit $sq(A)$ bezeichnet. Zeigen Sie: Für jede $m \times n$-Matrix A gilt $\operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(A^T A) = sq(A)$.

(b) Es seien A, B $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie: Ist A symmetrisch, dann ist auch $B^T AB$ symmetrisch.