Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

5. Übungsblatt für die Übungen vom 12.11.-16.11.2012

Matrixinvertierung

Ü25. (a) Gegeben sind die reellen Matrizen A_1, A_2, A_3. Untersuchen Sie, welche der Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_1\, x = b$ mit $b = (5, -11, 0)^T$

(c) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an.

Ü26. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme. Geben Sie auch die Lösungsmengen der zugehörigen homogenen Systeme an.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 &= 7 \\ x_1 + 11x_3 + x_4 &= 17 \end{aligned}$$

Ü27. (a) Gibt es ein lineares Gleichungssystem in den reellen Zahlen mit drei Unbekannten, so dass die Vektoren $(1, 6, 7)$, $(1, 7, 6)$ Lösungen sind, der Vektor $(1, 4, 9)$ jedoch keine Lösung ist?

(b) Zeigen Sie: Wenn ein lineares Gleichungssystem in den reellen Zahlen mit n Unbekannten mindestens zwei ganzzahlige Lösungen hat, dann gibt es mindestens eine Lösung, die nicht ganzzahlig ist.

(c) Zeigen Sie: Sind A und B jeweils $n\times n$-Matrizen und B invertierbar, dann gilt $AB^{-1} = B^{-1}A$ genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$ (und von $a \in \mathbb{R}$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $\frac{1}{a(a-1)}$ auszuklammern.

H29. Eine $n \times n$-Matrix A heißt *Blockmatrix*, wenn es eine $n_1 \times n_1$-Matrix P und eine $n_2 \times n_2$-Matrix Q (mit $n = n_1 + n_2$) gibt, so dass A die Form $A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ hat. Zeigen Sie, dass dann $A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ gilt. Was passiert, wenn P oder Q nicht invertierbar sind?

H30. (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar? Berechnen Sie für $a = 3$ die Matrix A^{-1}. Kontrollieren Sie Ihr Rechenergebnis durch eine Probe.

(b) Es seien A und B reelle Matrizen. Bestimmen Sie alle reellen Matrizen X, die der Gleichung $AX = B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ genügen.}$$