TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

6. Übungsblatt für die Übungen vom 19.11.-23.11.2012

LU-Faktorisierung, Vektorräume

Hinweis: Die Übungen am Mittwoch, dem 21.11.2012, fallen wegen eines Feiertages aus. Bitte besuchen Sie ausnahmsweise eine Übung an einem anderen Wochentag. Bitte denken Sie daran, auf Ihre Hausaufgabe den Termin Ihrer Übung und Ihren Übungsleiter zu notieren, so dass eine Zuordnung zu Ihrer eigentlichen Gruppe möglich ist.

Ü31. Bestimmen Sie LU-Faktorisierungen der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ und lösen Sie die Gleichungssysteme für die gegebenen rechten Seiten.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ü32. Sind die folgenden Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$ Vektorräume über $\mathbb{R}$? Begründen Sie ihre Antwort jeweils. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(a) $\{(x,y)^T \mid x \cdot y \geq 0\}$, (b) $\{(x,y)^T \mid x \geq 0\}$, (c) $\{(x,y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(d) $\{(x,y)^T \mid x^2 + y^2 = 0\}$, (e) $\{(x,y)^T \mid x - y = 0\}$, (f) $\{(x,y)^T \mid x - y = 1\}$.

Ü33. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen in einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $u \in V$ gelten:

(a) $0 \cdot u = o$,

(b) $\lambda \cdot u = o \iff \lambda = 0 \lor u = o$,

(c) $(-1) \cdot u = -u$.

Hinweis: Was muss hier überhaupt bewiesen werden?

A34. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Berechnen Sie die Inversen der in Aufgabe Ü31 (b) und (c) gegebenen Matrizen mit den folgenden beiden Methoden.

(a) Durch direkte Berechnung der Inversen mit dem Gauß-Algorithmus (analog zu Ü25).

(b) Durch Bestimmung der LU-Zerlegung $A = LU$, der anschließenden Berechnung von U^{-1} und L^{-1} und der Berechnung von $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

H35. Berechnen Sie die Lösungsmenge des durch die unten stehende Matrix A und den Vektor b definierten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit den folgenden beiden Methoden. Wie viele Multiplikationen müssen Sie jeweils durchführen?

(a) Durch Berechnung der Inversen mit dem Gauß-Algorithmus (analog zu Ü25)

(b) Mittels der LU-Zerlegung $A = LU$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Matrix A ist eine *Bandmatrix*, diese kommen in der Praxis oft vor; die LU-Faktorisierung bietet hier noch einen höheren Effizienzvorteil.

H36. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(A), \triangle, \cdot)$ zu einer beliebigen Menge A ein Vektorraum über dem Körper $\mathsf{GF}(2)$ ist. Dabei sei die Vektorraumaddition durch die symmetrische Differenz $\triangle$ und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathsf{GF}(2)$ durch $0 \cdot X := \emptyset$ und $1 \cdot X := X$ gegeben.

Hinweis: Mit dem Körper $\mathsf{GF}(2)$ wird die Multiplikation und die Addition modulo 2 bezeichnet.