TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

7. Übungsblatt für die Übungen vom 26.11.-30.11.2012

Untervektorräume, lineare Unabhängigkeit

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt befinden sich 2 Hausaufgaben. Sie können also maximal 2 von den für die Prüfungszulassung nötigen 5 Punkten erreichen.

Ü37. Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = b = 2c\} \leq \mathbb{R}^3$,

(b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^4 = 0\} \leq \mathbb{R}^2$,

(c) $\{(a+b,b^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$,

(e) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(f) $\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,|\, \sum_{i=0}^{n} p_i = a\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$),

(g) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(h) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist regulär}\} \leq \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hinweis: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist U ein Untervektorraum von V, schreiben wir $U \leq V$.

Ü38. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a,b,c \in \mathbb{R}$).

(a1) $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$,

(a2) $\{(1,1,0),(2,0,2),(0,2,3)\}$,

(a3) $\{(1,2,3),(2,2,0),(-1,0,3)\}$,

(a4) $\{(1,b),(c,1)\}$,

(a5) $\{(2,-1,1,1),(-3,2,-1,-3),(1,1,2,a)\}$.

Überprüfen Sie nochmals die Vektoren aus den Aufgabenteilen (a1) - (a4) auf lineare Unabhängigkeit, wenn der zugrundeliegende Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{Z}_5$ ist.

(b) Die Vektoren a,b,c aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $-a,\ a+b+b$,

(b2) $a-b,\ b+c,\ b-c$,

(b3) $a-b,\ a-c,\ b-c$.

Ü39. (a) Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V über einem Körper $\mathbb{K}$, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

(b) Finden Sie zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$, deren Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Vektorraum ist.

A40. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

(a) Bei der Untersuchung von Differentialgleichungen und in der Computergraphik spielen sogenannte *Hermite-Polynome* eine Rolle. Die ersten 4 Hermite-Polynome sind

$$1, \quad 2t, \quad -2+4t^2, \quad 12t-8t^3.$$

Sind diese Polynome linear unabhängig über $\mathbb{R}$? Liegt das Polynom $p(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ in dem von den ersten 4 Hermite-Polynomen aufgespannten Untervektorraum? Falls ja, geben Sie $p(t)$ als Linearkombination dieser Polynome an.

(b) Gegeben sind die Vektoren $(0,1,2)$, $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ und $(4,0,1)$ aus $(\mathbb{Z}_5)^3$. Gesucht sind alle Möglichkeiten, daraus über $\mathbb{Z}_5$ linear unabhängige Vektoren auszuwählen.

A41. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a) Die Menge von trigonometrischen Funktionen
$\{f_{a,b} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f = a\sin(x+b)\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems
$Ax = o$: $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = o\} \leq \mathbb{K}^n$.

(c) Die Menge der Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems
$Ax = b$: $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \leq \mathbb{K}^n$.

(d) Die Menge aller Polynome, die eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ besitzen:
$\{p \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}[X]$.

H42. (a) Gegeben ist die Menge $M := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_6 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ in Span $(M \setminus \{v_i\})$ enthalten ist. Gilt $\mathrm{Span}(\{v_2, v_5, v_6\}) = \mathrm{Span}(\{v_3, v_5, v_6\})$?

(b) Gibt es eine reelle Zahl α so, dass der Vektor $u = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ sich als reelle Linearkombination der Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen läßt?