TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

8. Übungsblatt für die Übungen vom 3.12.-7.12.2012

lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt befinden sich 2 Hausaufgaben. Sie können also maximal 2 von den für die Prüfungszulassung nötigen 5 Punkten erreichen.

Ü43. Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 paarweise verschiedene Elemente von $\mathbb{R}^4$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $v_4 = 3v_2 - v_3$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(b) Gilt $v_3 = 0$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(d) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

(e) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig.

(f) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Ü44. (a) Es sei

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \; v_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit $B \subseteq E$ an.

(b) Es seien

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \; u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix}, \; u_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear unabhängig ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^4$ mit $E \subseteq B$ an.

Hinweis: Eine Teilmenge $E \subseteq V$ eines Vektorraums V heißt *Erzeugendensystem*, wenn $V = \mathrm{Span}(E)$ gilt, d.h. jeder Vektor aus V als Linearkombination von Vektoren aus E dargestellt werden kann.

Ü45. Geben Sie eine Basis zu den folgenden Vektorräumen an und bestimmen Sie die Dimension.

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = -3x_1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = x_1\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0,\; x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_3 = x_4 = x_5\}$

(e) $\big\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,\big|\, \sum_{i=0}^{n} p_i = 0\big\}$

(f) $(\mathfrak{P}(A), \triangle, \cdot)$ (siehe Aufgabe H36)

A46. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Es seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_5 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^5$ und $E := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$. Ist E ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$? Geben Sie eine Basis B von $S := \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$ mit $B \subseteq E$ an und bestimmen Sie die Dimension von S.

A47. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $B \subseteq V$. Zeigen Sie (vgl. Vorlesung): Die Menge B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist (d.h. keine echte Teilmenge $B' \subset B$ ist ein Erzeugendensystem von V).

H48. Für den zweielementigen Körper $\mathbb{K} := (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ betrachten wir den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V := \mathbb{K}^3$.

(a) Wie viele Elemente hat V?

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$ eine Basis von V bilden.

(c) Sei $e_4 := (1, 1, 1)$. Zeigen Sie, dass jede dreielementige Teilmenge der Menge $E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ linear unabhängig ist. Ist auch E selbst linear unabhängig?

(d) Bestimmen Sie die von folgenden Mengen erzeugten Untervektorräume von V (jeweils durch Angabe aller ihrer Elemente):

$$M_1 := \{e_1, e_2\}, \quad M_2 := \{e_2, e_4\}, \quad M_3 := \{e_3\}\,.$$