TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil 1 (Lineare Algebra), Wintersemester 2012/13

9. Übungsblatt für die Übungen vom 10.12.-14.12.2012

Rang, Kern, Spaltenraum einer Matrix, lineare Abbildungen

Ü49. (a) Bestimmen Sie für die folgenden reellen Matrizen den Rang und den Kern:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie jeweils eine Basis des Kerns an, und stellen Sie sämtliche Elemente des Kerns als Linearkombination der Basisvektoren dar. Bestimmen Sie die Dimension des Spaltenraums. Liegt der Vektor $a = (0, 2, -5, -8)^T$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ von A? Liegt der Vektor $b = (2, -2, 2, -2)^T$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(B)$ von B?

(b) Zählen Sie alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_2)^7$ auf, die im Kern der Matrix C liegen bzw. alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_3)^3$ im Kern der Matrix D. Welche Dimension haben die Spaltenräume von C und D?

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ü50. (a) Durch die Matrizen (über $\mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind lineare Abbildungen $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben (Warum?). Wie groß sind n und m für f_A bzw. f_B? Berechnen Sie jeweils Basen für $\mathrm{Ker}\, f_A$, $\mathrm{Im}\, f_A$, $\mathrm{Ker}\, f_B$ und $\mathrm{Im}\, f_B$. Sind die Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(b) Wie viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f((2,0)^T) = (0,4), \quad f((1,1)^T) = (5,2), \quad f((1,2)^T) = (10,a)$$

gibt es in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$?

Ü51. (a) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn der Kern der Abbildung $\ker(f)$ nur den Nullvektor enthält.

(b) Beweisen Sie: Das Bild $\mathrm{im}(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von W.

H52. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_5$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Geben Sie die Dimension und eine Basis des Kerns von A an.

(c) Wie viele Elemente hat der Kern? Geben Sie alle Elemente an.

H53. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f\left(\binom{1}{3}\right) = \binom{3}{1}$ und $f\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{1}{2}$.

(a) Bestimmen Sie $f\left(\binom{2}{6}\right)$, $f\left(\binom{0}{3}\right)$ und $f\left(\binom{2}{7}\right)$.

(b) Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

(c) Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $M_B^B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$ des $\mathbb{R}^2$.

H54. (a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\dim(\ker(A)) \neq 0$ und $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{K}^m$.

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\dim(\ker(A)) = 0$ und einen Vektor $v \in \mathbb{K}^m$ mit $v \notin \mathrm{Col}(A)$.

(c) Beweisen Sie: ist $A \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, dann gilt $\dim(\ker(A)) \neq 0$ genau dann, wenn ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $v \notin \mathrm{Col}(A)$ existiert.