Lineare Abbildung

Eine Abbildung $F : D \to W$ heißt **linear**, falls sie

(1) homogen: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in D : F(\lambda x) = \lambda F(x)$ und

(2) additiv: $\forall x_1, x_2 \in D : F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ ist.

(Mit Mengen D, W und $\mathbb{K}$, die später näher spezifiziert werden.)

System linearer Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Eine **Lösung:** ist ein n-Tupel $(s_1, \ldots, s_n)$, das – für $x_1, \ldots, x_n$ eingesetzt – alle m Gleichungen erfüllt.

Die **Lösungsmenge:** ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems.

Zwei lineare Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, falls sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Beispiele linearer Funktionen

(1) Aus der Physik

Federkraft:
Die Kraftwirkung ist **proportional** zur Auslenkung der Feder.

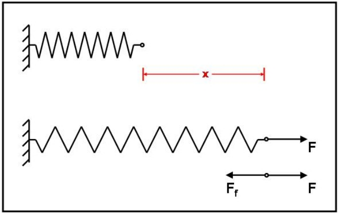
$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$F = kx$$

k ... Federkonstante

F ... Betrag der Kraft

x ... Betrag der Auslenkung



Die Kraft als Funktion der Auslenkung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{F(x) = kx}$ ist **linear**.

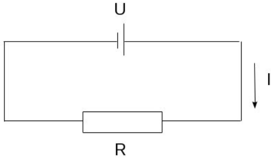
Beispiele linearer Funktionen

(2) Elektrotechnik

Einfacher Schaltkreis: Ein Strom I fließt durch einen Widerstand R bei angelegter Spannung U

Es gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$R = \frac{U}{I}$$



- bei festem Widerstand R: Strom als Funktion der Spannung $\boxed{I(U) = \frac{1}{R} U}$ ist **linear**.
- bei fester Spannung U: Strom als Funktion des Widerstandes $\boxed{I(R) = U \cdot \frac{1}{R}}$ ist **nichtlinear**, denn z.B.

$$I(2R) = \frac{U}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{R} = \frac{1}{2} I(R) \neq 2\, I(R).$$

Beispiele linearer Funktionen

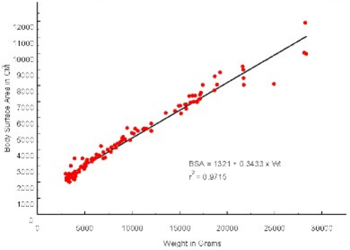
(3) Aus der Datenanalyse

Lineare Regression:

Gesucht ist die "bestapproximierende" Gerade für die gegebene Datenmenge.

Ansatz: $y(x) = a \cdot x + b$

Linear Regression of Body Surface Area vs. Weight



Die Funktion $y(x)$ ist für $b \neq 0$ **nichtlinear**, denn z.B.

$$y(2x) = a(2x) + b = 2ax + b \;\neq\; 2y(x) = 2ax + 2b\,,$$

aber sie ist **affin-linear**.

Beispiele linearer Funktionen

(4) Mathematische Modellierung

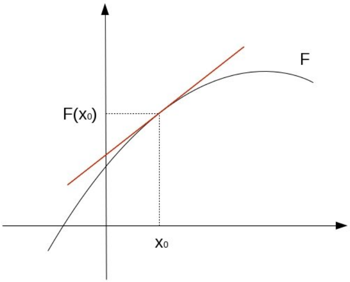
Linearisierung mathematischer Modelle:

nichtlineares Modell $\Rightarrow$ lineares Modell

nichtlineares Modell: $\quad y = F(x)$

Lokale Linearisierung nahe x_0:

$$F(x) \sim F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$



Lineare Gleichungssysteme

(5) Beispiel aus dem Leben

Ein Wanderer betritt ein Hotel und verlangt an der Rezeption ein Einzelzimmer für die Nacht. Der Rezeptionist schaut ihn verschmitzt an und sagt:

Vielleicht gibt es noch ein Einzelzimmer für Sie. Doch um das zu erfahren, müssen Sie aus den folgenden Informationen herausfinden, ob noch ein solches Zimmer frei ist. Ist dem so, dann können Sie eines haben. Hören Sie:

- *Es gibt genau 24 Zimmer, und zwar Einzel-, Zweibett- und Dreibettzimmer.*
- *Das Hotel verfügt insgesamt über 44 Betten (keine Aufbettungen).*
- *Die Summe der Anzahl der Einzel- und Dreibettzimmer ist gerade das Doppelte der Anzahl der Zweibettzimmer.*
- *Zur Zeit sind 8 Einzelzimmer belegt.*

Gibt es noch ein freies Einzelzimmer für den müden Wanderer?

Lineare Gleichungssysteme

(6) Beispiel aus der Ökonomie

Eine Firma produziert Produkte P_1, P_2 und P_3.

Überschuß von Produkt P_i: c_i,

produzierte Einheiten von P_i: x_i, $i = 1, 2, 3$.

	P_1	P_2	P_3
P_1	0.1	0.05	0.4
P_2	0	0.2	0.5
P_3	0.3	0.2	0

Input von P_i, um eine Einheit von P_j zu erzeugen (i,j=1,2,3).

$\Rightarrow$ **lineares Gleichungssystem:**

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1-0.1)x_1 & - & 0.05x_2 & - & 0.4x_3 & = & c_1 \\ & & (1-0.2)x_2 & - & 0.5x_3 & = & c_2 \\ 0.3x_1 & - & 0.2x_2 & - & x_3 & = & c_3 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

Zu Beispiel (5): Rätsel des Rezeptionisten

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 24 & (1) \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 44 & (2) \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 & (3) \end{array}$$

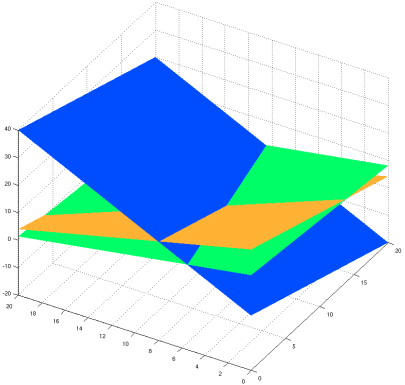
Lösungsmenge:

$\mathcal{L} = \{(10, 8, 6)\}$.

Geometrische Interpretation:

Schnittpunkt dreier Ebenen.

(1)...gelb, (2)...grün, (3)...blau



Matrix, Vektor und Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechte-Seite-Vektor:

$$\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A ist eine $(m \times n)$**-Matrix**, $\vec{b}$ ist ein Spaltenvektor der Dimension m.

Erweiterte Koeffizientenmatrix: $[A|\vec{b}] := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$