Matrixoperationen

Einige spezielle Matrizen:

- Nullmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- n-te Einheitsmatrix: $E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- Diagonalmatrix: $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$

Eigenschaften von Matrixoperationen

I. **Addition**

Es seien A, B, C Matrizen der Größe $m \times n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt:

(A1) $A + B = B + A$ Kommutativgesetz

(A2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativgesetz

(A3) $A + 0 = A$ (0 ... Nullmatrix der Größe $m \times n$)

(A4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(A5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

II. **Multiplikation**

Es seien A, B, C Matrizen der Größen $m \times n$, $n \times r$ bzw. $r \times s$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(M1) $(AB)C = A(BC)$ Assoziativgesetz

(M2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

(M3) $E_m A = A = A E_n$

Eigenschaften von Matrixoperationen

III. **Distributivgesetze**

Es seien A, B, C Matrizen derart, dass die folgenden Operationen definiert sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(1) $A(B + C) = AB + AC$
(2) $(B + C)A = BA + CA$

IV. **Transponierte Matrix**

Es seien A, B, C Matrizen derart, dass die folgenden Operationen definiert sind, und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(T1) $(A^T)^T = A$
(T2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(T3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
(T4) $(AB)^T = B^T A^T$

Systematisches Lösen linearer GLS

Grundstrategie: *Ersetze das gegebene lineare System* $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ *durch ein äquivalentes System von einfacherer Gestalt.*

Elementare Zeilenoperationen, die äquivalente lineare GLS erzeugen:

lineares GLS $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$	erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|\vec{b}]$
(1) Vertausche zwei Gleichungen.	**Vertausche** zwei Zeilen.
(2) Multipliziere eine Gleichung mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.	**Skaliere** einen Zeilenvektor mit $\lambda \neq 0$.
(3) Addiere zu einer Gleichung das Vielfache einer anderen.	**Addiere** zu einem Zeilenvektor das Vielfache eines anderen.

Beispiel Gauss-Algorithmus – Vorwärtsphase

Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 16 & (2) \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 15 & (3) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \\ 2 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -9 & (3') \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\ & & & - & x_3 & = & -1 & (3'') \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ \color{red}{0} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ **Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix**

Beispiel Gauss-Algorithmus – Rückwärtsphase

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 24 & (1) \\
 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 4 & (2') \\
 & & & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x_1 & + & x_2 & & & = & 21 & (1') \\
 & & \frac{1}{2}x_2 & & & = & \frac{7}{2} & (2'') \\
 & & & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrcrl}
x_1 & & & = & 7 & (1''') \\
 & x_2 & & = & 7 & (2''') \\
 & & x_3 & = & 1 & (3''')
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ **reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix**

Gauss-Algorithmus

- ist ein **systematisches Lösungsverfahren** zur Berechnung der Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems

  $$A\vec{x} = \vec{b}$$

  mit $(n \times m)$- Matrix A und rechter Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

- der Algorithmus führt stets **in endlicher Zeit zur vollständigen Lösung** des Problems (kann aber dauern: $\nearrow$ Komplexität des Algorithmus).

- Er gliedert sich in Vorwärts- und Rückwärtsphase:

  Vorwärtsphase: Schrittweise Umwandlung der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in eine Zeilenstufenform.

  Rückwärtsphase: Schrittweise Umwandlung obiger Zeilenstufenform in die reduzierte Zeilenstufenform von $[A|\vec{b}]$.

Matrizen A und B, die auseinander durch Anwendung von elementaren Zeilenoperationen hervorgehen, heißen zueinander **zeilen-äquivalent**.

Gauss-Algorithmus

Matrix hat Zeilenstufenform:

- Alle Zeilen mit Nichtnulleinträgen liegen oberhalb der Nullzeilen und
- jeder führende Eintrag einer Zeile (d.h. der von links gesehen erste Nichtnulleintrag) liegt rechts des führenden Eintrags der darüberliegenden Zeile.

Matrix hat reduzierte Zeilenstufenform:

- Die Matrix hat Zeilenstufenform,
- der führende Eintrag der Nichtnullzeilen ist 1 und
- jeder führende Eintrag einer Zeile ist der einzige Nichtnulleintrag in seiner Spalte.

<u>Theorem 2:</u> Jede Matrix hat eine eindeutig bestimmte reduzierte Zeilenstufenform.

Elementarmatrizen

Elementarmatrix heißt jede $(n \times n)$-Matrix, die durch das Ausführen einer elementaren Zeilenoperation aus der Einheitsmatrix E_n entsteht.

Jede elementare Zeilenoperation angewandt auf eine $(m \times n)$-Matrix A kann als Multiplikation von A mit einer geeigneten Elementarmatrix geschrieben werden.

Beispiel: für 3×3 Matrizen

Skalieren: $\lambda \cdot 3.$ Zeile

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Vertauschen: 2.Zeile $\Leftrightarrow$ 3.Zeile

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Addieren: 2.Zeile $+ \lambda \cdot$ 1.Zeile

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel weiter:

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \lambda \cdot 7 & \lambda \cdot 8 & \lambda \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda \cdot 1 + 4 & \lambda \cdot 2 + 5 & \lambda \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Theorem zur Äquivalenz linearer Systeme

Sind die erweiterten Koeffizientenmatrizen zweier linearer Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{und} \quad \tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{b}}$$

zeilenäquivalent, d.h. $[A|\vec{b}] \sim [\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}]$, so sind die linearen Systeme äquivalent.
(M.a.W. sie haben dieselbe Lösungsmenge)

Beweis: Es existieren Elementarmatrizen $M_1, \ldots, M_k$ mit

$$M_k \cdot \ldots \cdot M_1 \cdot [A|\vec{b}] = [\tilde{A}|\tilde{\vec{b}}].$$

$$\Rightarrow \quad M_k \cdot \ldots \cdot M_1 \cdot A = \tilde{A} \quad \text{und} \quad M_k \cdot \ldots \cdot M_1 \vec{b} = \tilde{\vec{b}}.$$

Es gilt damit für eine Lösung $\vec{s}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$A\vec{s} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad M_k \cdot \ldots \cdot M_1 \cdot A\vec{s} = M_k \cdot \ldots \cdot M_1 \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}\vec{s} = \tilde{\vec{b}}.$$

Analog umgekehrt für eine Lösung $\vec{s}$ von $\tilde{A}\vec{s} = \tilde{\vec{b}}$.