Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein **homogenes lineares Gleichungssystem** ist von der Form

$$A\vec{x} = \vec{0}\ .$$

Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist stets lösbar, denn es besitzt die **triviale** Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

Interessant ist, ob auch **nichttriviale** Lösungen existieren, d.h. Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Existenz nichttrivialer Lösungen:

<u>**Theorem 5:**</u> Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn es mindestens eine freie Variable besitzt.

Hat ein homogenes lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $(m \times n)$-Matrix A genau k freie Variable ($k \leq n$), dann existieren Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ derart, dass für die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ gilt:

$$\boxed{\mathcal{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = t_1\vec{v}_1 + \ldots + t_k\vec{v}_k\ ,\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}\ .}$$

Ausbalancieren chemischer Gleichungen

PbN_6 und $Cr\,Mn_2\,O_8$ reagieren zu $Pb_3\,O_4$, $Cr_2\,O_3$, $Mn\,O_2$ und NO

Also:

$$m_1 \cdot PbN_6 + m_2 \cdot Cr\,Mn_2\,O_8 \to m_3 \cdot Pb_3\,O_4 + m_4 \cdot Cr_2\,O_3 + m_5 \cdot Mn\,O_2 + m_6 \cdot NO$$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
Pb	1	0	3	0	0	0
N	6	0	0	0	0	1
Cr	0	1	0	2	0	0
Mn	0	2	0	0	1	0
O	0	8	4	3	2	1

Ausbalancieren chemischer Gleichungen

$$m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = m_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + m_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{22}{45} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{90} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{44}{45} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)^T = \left(\frac{5}{30} m_6, \frac{22}{45} m_6, \frac{5}{90} m_6, \frac{11}{45} m_6, \frac{44}{45} m_6\right)^T \ , \quad m_6 \in \mathbb{R}$$

Lösungsmenge in parametrischer Vektorform:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)^T = t \cdot \left(\frac{5}{30}, \frac{22}{45}, \frac{5}{90}, \frac{11}{45}, \frac{44}{45}, 1\right)^T \ , \ t \in \mathbb{R}$$

Ausbalancieren chemischer Gleichungen

Lösungsmenge:

$$[m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T = t \cdot \left[\frac{5}{30}, \frac{22}{45}, \frac{5}{90}, \frac{11}{45}, \frac{44}{45}, 1\right]^T, \; t \in \mathbb{R}$$

Gesucht sind alle **ganzzahligen** Lösungen!

"Minimale" Lösung für $t = 90$:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)^T = (15, 44, 5, 22, 88, 90)^T$$

Balancierte chemische Reaktionsgleichung:

$$15\, PbN_6 \;+\; 44\, Cr\, Mn_2\, O_8 \rightarrow 5\, Pb_3\, O_4 \;+\; 22\, Cr_2\, O_3 \;+\; 88\, Mn\, O_2 \;+\; 90\, NO$$

Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Theorem 6 Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ sei lösbar (d.h. hat eine oder unendlich viele Lösungen). Es sei $\boldsymbol{\vec{s}}$ eine Lösung.

Dann gilt: Die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die sich in der Form

$$\boldsymbol{\vec{x}} = \boldsymbol{\vec{s}} + \boldsymbol{\vec{x}_h}$$

schreiben lassen, wobei $\boldsymbol{\vec{x}_h}$ eine Lösung des homogenen Systems $\boldsymbol{A\vec{x} = \vec{0}}$ ist.

Man nennt die Lösung $\vec{s}$ auch **partikuläre Lösung** und sagt:

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ läßt sich als Summe aus einer **partikulären Lösung** und der **allgemeinen Lösung** $\mathcal{L}_0$ der homogenen Gleichung schreiben:

$$\mathcal{L} = \vec{s} + \mathcal{L}_0 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{s} + \vec{x}_h,\ \vec{x}_h \in \mathcal{L}_0 \right\}.$$

Die inverse Matrix

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt **invertierbar**, wenn es eine $(n \times n)$-Matrix B gibt, so dass

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n \ .$$

Bezeichnung: $A^{-1} := B$ **inverse Matrix** von A.

Invertierbare Matrizen heißen **regulär**, nicht invertierbare $(n \times n)$-Matrizen **singulär**.

Bemerkung: Die Menge aller regulären $(n \times n)$-Matrizen bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe: $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$.

Theorem 7: Für eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix A hat das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für **jeden** Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ die **eindeutige** Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Für invertierbare $(n \times n)$-Matrizen A und B gilt:

- $(A^{-1})^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Die inverse Matrix

Beispiel: Die Inversen der Elementarmatrizen

Jede Elementarmatrix ist invertierbar, d.h. jede elementare Zeilenoperation ist reversibel!

Beispiele für 3×3 Matrizen:

$\boxed{\text{Skalieren: } \lambda\cdot 3.\text{ Zeile}}$ $\boxed{\text{Vertauschen: 2.Zeile} \Leftrightarrow \text{3.Zeile}}$ $\boxed{\text{Addieren: 2.Zeile} + \lambda\cdot\text{1.Zeile}}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse:

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad M_2^{-1} = M_2, \qquad M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix

Theorem 8: **- Über die inverse Matrix -**

Es sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. A hat n Pivot-Positionen.
3. A ist zeilen-äquivalent zu E_n.
4. Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
5. Das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung.
6. Es existiert eine $(n \times n)$-Matrix C, so dass $C \cdot A = E_n$.
7. Es existiert eine $(n \times n)$-Matrix D, so dass $A \cdot D = E_n$.

Gilt die Bedingung 6 bzw. 7, so ist $C = A^{-1}$ bzw. $D = A^{-1}$.

Berechnung der Inversen: z.B. mittels des Gauss-Algorithmus.