LU-Faktorisierung

Eine **LU-Faktorisierung** einer $(n \times n)$-Matrix A ist eine Zerlegung $A = L \cdot U$ mit einer

unteren Dreiecksmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \ddots & & \vdots \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ * & \dots & * & * & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$*$ ... beliebiger Eintrag

Anwendung für lineare Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$ mit fester quadratischer Matrix A und unterschiedlichen rechten Seiten $\vec{b}$.

LU-Faktorisierung

Lösungsverfahren linearer Systeme mit LU-Faktorisierung:

Ist für eine $(n \times n)$-Matrix A eine LU-Faktorisierung $A = LU$ gegeben, so kann das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ effizient in zwei Schritten gelöst werden:

- $\boxed{\text{1.Schritt: Berechne die Lösung } \vec{y} \text{ von } L\vec{y} = \vec{b} \text{ durch Vorwärtseinsetzen.}}$
- $\boxed{\text{2.Schritt: Berechne die Lösung } \vec{x} \text{ von } U\vec{x} = \vec{y} \text{ durch Rückwärtseinsetzen.}}$

Der **Aufwand dieses Algorithmus** ist von der Ordnung $O(n^2)$.

Der **Aufwand des Gauss-Algorithmus** ist von der Ordnung $O(n^3)$.

Die LU-Faktorisierung von A kann mit dem Gauss-Algorithmus berechnet werden.

Bemerkung: Für sehr große, dünn-besetzte, lineare Gleichungssysteme ist der Gauss-Algoritmus nicht in vertretbarer Zeit durchführbar. Dort werden iterative Lösungsverfahren angewendet.

Aufwand des Gauss-Algorithmus

Betrachten ein lineares System $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $(n \times n)$-Matrix A und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

$$[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Anzahl Operationen (Vorwärtsphase): - ohne Vertauschungen - (rückwärts analog)

		# Add.	**# Mult.**
1. Schritt:	Nullen an n-1 Stellen in 1. Spalte:	$n(n-1)$	$n(n-1)$.
2. Schritt:	Nullen an n-2 Stellen in 2. Spalte:	$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-2)$.
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
(n-1). Schritt:	Null in letzter Position:	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$.

Aufwand insgesamt: $$\mathcal{A}(n) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k = \underbrace{\frac{2}{3}n^3}_{\text{dominant für großes n}} - \frac{2}{3}n = O(n^3)\,.$$

Vektorräume

Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer binären Operation $\circ : G \times G \to G$, die folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Die Operation $\circ$ ist assoziativ.

(2) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$: $\forall a \in G: \; e \circ a = a \circ e = a$

(3) Jedes Element besitzt ein Inverses: $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G: \; a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Eine Gruppe heißt **abelsch**, falls $\circ$ kommutativ ist.

Ein **Körper** ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei binären Operationen $+_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und $\cdot_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}})$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element $0_{\mathbb{K}}$).

(2) $(\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \cdot_{\mathbb{K}})$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element $1_{\mathbb{K}}$).

(3) Es gelten die Distributivgesetze:
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; (a +_{\mathbb{K}} b) \cdot_{\mathbb{K}} c = (a \cdot_{\mathbb{K}} c) +_{\mathbb{K}} (b \cdot_{\mathbb{K}} c)$.
$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; a \cdot_{\mathbb{K}} (b +_{\mathbb{K}} c) = (a \cdot_{\mathbb{K}} b) +_{\mathbb{K}} (a \cdot_{\mathbb{K}} c)$.

Vektorräume

Ein **Vektorraum** über einem Körper $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}})$ ist eine nichtleere Menge V, auf der zwei Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ definiert sind (üblicherweise bezeichnet mit Addition bzw. Multiplikation mit einem Skalar), die die folgenden Axiome erfüllen:

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ \vec{u} + \vec{v} \in V$ — Abgeschlossenheit von +

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ — Kommutativität

(3) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : \ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ — Assoziativität

(4) $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{u} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(5) $\forall \vec{u} \in V \ \exists (-\vec{u}) \in V : \ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$

(6) $\forall \vec{u} \in V \ \forall c \in \mathbb{K} : \ c\vec{v} \in V$ — Abgeschlossenheit von ·

(7) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \ \forall c \in \mathbb{K} : \ c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$

(8) $\forall \vec{u} \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} : \ (c +_{\mathbb{K}} d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$

(9) $\forall \vec{u} \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} : \ (c \cdot_{\mathbb{K}} d)\vec{u} = c(d\vec{u})$

(10) $\forall \vec{u} \in V : \ 1_{\mathbb{K}}\vec{u} = \vec{u}.$

Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.