Untervektorraum

Ein **Unter(vektor)raum** eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, die folgende Eigenschaften besitzt

(1) $\vec{0} \in U$,

(2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U: \; \vec{u} + \vec{v} \in U$,

(3) $\forall \vec{u} \in U \; \forall c \in \mathbb{K}: \; c\vec{v} \in U$.

Theorem 9: Jeder Unterraum U eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist selbst ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Theorem 10: Sind U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$, so ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

Folgerung: Der Durchschnitt endlich vieler Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper $\mathbb{K}$

$$U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$$

ist wieder ein Unterraum von V.

Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ von Unterräumen U_1 und U_2 ist i.a. kein Unterraum.

Aufgespannter Untervektorraum

Für beliebige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ und Skalare $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ heißt die Summe

$$c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_k \vec{v}_k$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.

Der durch die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ **aufgespannte Unterraum** von V ist definiert durch

$$\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) := \left\{ c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_k \vec{v}_k \;\middle|\; c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})$ heißt auch lineare Hülle der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$.

Allgemein:

Die **lineare Hülle einer Teilmenge** $M \subseteq V$ ist definiert durch

$$\mathrm{Lin}(M) := \bigcap_{M \subseteq U,\, U \text{ Unterraum}} U$$

$\mathrm{Lin}(M)$ ist der kleinste Unterraum des Vektorraumes V, der M enthält.

Offenbar gilt: $\mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = \mathrm{Lin}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})$.

Aufgespannter Untervektorraum

Theorem 11: Es seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ beliebige Vektoren aus V. Dann ist der Spannraum

$$U := \text{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \left\{ c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k \,\middle|\, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \right\}$$

ein Unterraum von V.

Beweis:

1. $\boxed{\vec{0} \in U}$ Gilt, da $0 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \in U$.

2. $\boxed{\vec{u}, \vec{v} \in U \;\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U}$ Es seien $\vec{u}, \vec{v} \in U$ beliebig. Dann gilt:

$$\exists\, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k \in \mathbb{K}: \quad \vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k,\ \vec{v} = d_1\vec{v}_1 + \ldots + d_k\vec{v}_k.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \overset{Axiom\,2,3,8}{=} (c_1 + d_1)\vec{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\vec{v}_k \in U.$$

3. $\boxed{\vec{u} \in U, \alpha \in \mathbb{K} \;\Rightarrow \alpha\vec{u} \in U}$ Es seien $\vec{u} \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt:

$$\exists\, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}: \quad u = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k.$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \overset{Axiom\,7,9}{=} (\alpha c_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha c_k)\vec{v}_k \in U.$$

Lineare Unabhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ heißt **linear abhängig**, falls es ein $j \in \{1, \dots, k\}$ gibt und Skalare $c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k$ mit

$$\vec{v}_j = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_{j-1} \vec{v}_{j-1} + c_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + c_k \vec{v}_k \, .$$

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ heißt **linear unabhängig**, falls sie nicht linear abhängig ist.

Theorem 12: Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ die Gleichung

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

für $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ nur die triviale Lösung $c_1 = \dots = c_k = 0$ besitzt.

Weiter gilt:

- Eine Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow$
  $\exists j \in \{1, \dots, k\}$: $\operatorname{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}) = \operatorname{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_k\})$.
- Eine Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, $k \geq 2$, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, ist linear abhängig $\Leftrightarrow$
  Es existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$, so dass $\vec{v}_j$ Linearkombination von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}$ und die Menge $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}\}$ linear unabhängig ist.

Lineare Unabhängigkeit

Beweis zu Theorem 12:

$\boxed{\Rightarrow}$ Es sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linear unabhängig.

Annahme, es existiert eine nichttriviale Lösung $(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{K}^k$ von

$$c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_k \vec{v}_k = \vec{0} \,. \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \exists j \in \{1, \ldots, k\} : \quad c_j \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_j = \frac{-c_1}{c_j} \vec{v}_1 + \ldots + \frac{-c_{j-1}}{c_j} \vec{v}_{j-1} + \frac{-c_{j+1}}{c_j} \vec{v}_{j+1} + \ldots + \frac{-c_k}{c_j} \vec{v}_k \,.$$

Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Vektoren.

$\boxed{\Leftarrow}$ Es gelte, dass Gleichung (*) nur die triviale Lösung besitzt.

Annahme, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ ist linear abhängig.

$$\Rightarrow \quad \exists j \in \{1, \ldots, k\}, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_k \in \mathbb{K} :$$

$$\vec{v}_j = c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_{j-1} \vec{v}_{j-1} + c_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \ldots + c_k \vec{v}_k \,.$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_{j-1} \vec{v}_{j-1} + (-1) \vec{v}_j + c_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \ldots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Widerspruch zur Voraussetzung, dass nur die triviale Lösung für (*) existiert. $\square$

Zusammenhang zu linearen GLS

Es seien $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

- $\boxed{\text{Sind } \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \text{ linear unabhängig?}}$

$\Leftrightarrow \quad c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_k]}_{=:A} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \text{hat nur die triviale Lösung.}$$

$\Leftrightarrow$ alle Spalten von A sind Pivotspalten (keine freien Variablen).

- $\boxed{\text{Liegt } \vec{w} \in \mathbb{R}^n \text{ in Span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})\text{?}}$

$\Leftrightarrow \quad c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k = \vec{w}$ hat für $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ eine Lösung.

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_k]}_{=:A} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \vec{w} \quad \text{ist lösbar.}$$

$\Leftrightarrow$ die letzte Spalte von $[A|\vec{w}]$ ist keine Pivotspalte.