Basis eines Vektorraumes

Eine Menge $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von Vektoren eines Vektorraumes V heißt **Basis** von V, wenn gilt:

(B1) die Menge von Vektoren $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ ist linear unabhängig,

(B2) $V = \mathrm{Span}(\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\})$.

<u>Basisauswahlsatz:</u>

Es sei $V \neq \{\vec{0}\}$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

Dann läßt sich für jeden Unterraum $U = \mathrm{Span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}) \subseteq V$, $U \neq \{0\}$, eine Teilmenge der Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ auswählen, die eine Basis von U ist.

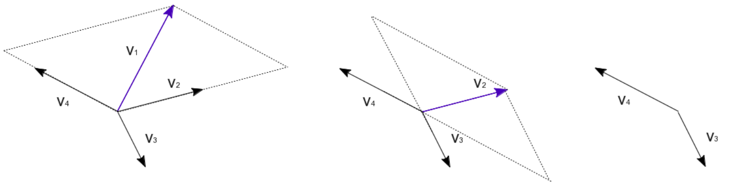
Beweisidee:

Wirf nacheinander Vektoren $\vec{v}_j$ aus dem Erzeugendensystem $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ von U hinaus, die eine Linearkombination der Vektoren des jeweils verbleibenden Erzeugendensystems sind.

Basis eines Vektorraumes

Basisauswahl:

Beispiel: $\boxed{\text{die Ebene } \mathbb{R}^2}$ $U = \text{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\})$.



1. Schritt: $U = \text{Span}(\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\})$

2. Schritt: $U = \text{Span}(\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\})$

Die Vektoren $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ Sie bilden eine Basis von U.

Koordinatensystem bzgl. einer Basis

Theorem 13: (Eindeutigkeit der Koordinatendarstellung)

Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem $\vec{v} \in V$ eindeutig bestimmte $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ mit $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$.

Koordinatenvektor von $\vec{v}$ bzgl. $\mathcal{B}$: $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Beweis: $\boxed{\text{Existenz der Koordinatendarstellung:}}$

Da $V = \text{Span}(\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\})$ (s. (B2)) gibt es eine Darstellung $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n$.

$\boxed{\text{Eindeutigkeit der Koordinatendarstellung:}}$

Annahme: Es gibt zwei Darstellungen $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_n\vec{b}_n = d_1\vec{b}_1 + \ldots + d_n\vec{b}_n$.

Damit ergibt sich:

$$(c_1 - d_1)\vec{b}_1 + \ldots + (c_n - d_n)\vec{b}_n = \vec{0}\,.$$

Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig (s. (B1)), folgt: $\forall i \in \{1, \ldots, n\}: \; c_i - d_i = 0$, d.h. $c_i = d_i$. $\square$

Koordinatenabbildung

Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V über $\mathbb{K}$.

Theorem 14: Die Koordinatenabbildung $\mathcal{F}_\mathcal{B} : V \to \mathbb{K}^n,\ v \mapsto [v]_\mathcal{B}$ ist ein **Isomorphismus** zwischen Vektorräumen, d.h. bijektiv und linear.

Beweis:

$\boxed{\text{bijektiv = injektiv + surjektiv:}}$ Dass $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ injektiv ist, folgt direkt aus Theorem 13.

Für $(c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{K}^n$ beliebig ist $\mathcal{F}_\mathcal{B}(\vec{v}) = (c_1, \ldots, c_n)^T$. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ ist surjektiv.

$\boxed{\text{Linearität:}}$ Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ beliebig.

Dann existieren eindeutige Koordinatendarstellungen:

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + \ldots + v_n\vec{b}_n \text{ und } \vec{w} = w_1\vec{b}_1 + \ldots + w_n\vec{b}_n.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathcal{F}_\mathcal{B}(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \mathcal{F}_\mathcal{B}((\alpha v_1 + \beta w_1)\vec{b}_1 \ldots + (\alpha v_n + \beta w_n)\vec{b}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n + \beta w_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\
&= \alpha\mathcal{F}_\mathcal{B}(\vec{v}) + \beta\mathcal{F}_\mathcal{B}(\vec{w}).
\end{aligned}$$

□

Basis eines Vektorraumes

Theorem 14: Alle Basen eines Vektorraumes haben dieselbe Anzahl Elemente.

Folgerungen: Hat V eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, so ist

- jede Menge aus mehr als n Vektoren in V linear abhängig und
- jede Menge aus weniger als n Vektoren in V nicht aufspannend.

Zusammenhang zu linearen Gleichungssystemen

- Es seien $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$

  $$\Leftrightarrow \quad k = n \quad \text{und} \quad \underbrace{(\vec{b}_1 \ \ldots \ \vec{b}_k)}_{=:A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{ist nur trivial lösbar.}$$

  $\Leftrightarrow$ A hat in jeder Zeile und jeder Spalte eine Pivotposition.

  $\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert.

- Es seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.

  $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ ist linear unabhängig in V.

  $\Leftrightarrow$ $\{[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\vec{v}_k]_{\mathcal{B}}\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^k$.