Basis eines Vektorraumes

Basisergänzungssatz:

Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum von V und $\dim V = n$, so kann jede Menge linear unabhängiger Vektoren aus U zu einer Basis von U erweitert werden.

Und es gilt:

$$\dim U \leq \dim V.$$

Beweis:

$\boxed{\text{1.Fall:}}$ $U = \{\vec{0}\}$. Es gibt keine Menge linear unabhängiger Vektoren; $\dim U = 0$.

$\boxed{\text{2.Fall:}}$ $U \neq \{\vec{0}\}$. Es sei $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\} \subset U$ linear unabhängig.

$\boxed{\text{Fall 2.1:}}$ $U = \text{Span}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}) \Rightarrow \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ ist Basis. $\checkmark$

$\boxed{\text{Fall 2.2:}}$ $U \neq \text{Span}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}) \Rightarrow \exists\, \vec{u}_{k+1} \in U \setminus \text{Span}(\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\})$

$\Rightarrow \quad \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}\}$ ist linear unabhängig.

Wiederhole, bis Fall 2.1 eintritt.
Dies geschieht spätestens bei n Vektoren $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, da $\dim V$=n. $\square$

Basis eines Vektorraumes

Basisergänzungssatz:

Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum von V und $\dim V = n$, so kann jede Menge linear unabhängiger Vektoren aus U zu einer Basis von U erweitert werden.

Und es gilt:

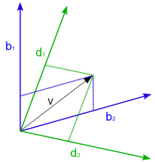
$$\dim U \leq \dim V.$$

Folgerungen: Hat V eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ (d.h. $\dim V = n$), so ist

- jede Menge aus ***n*** **linear unabhängigen** Vektoren in V eine Basis und
- jede Menge aus ***n*** **den Vektorraum** ***V*** **aufspannenden** Vektoren eine Basis.

Basiswechsel

Gegeben sei ein Vektorraum V mit einer Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$.
Es wird eine neue Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{\vec{\tilde{b}}_1, \ldots, \vec{\tilde{b}}_n\}$ betrachtet.



Frage: Ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in V$ ist mit Koordinaten $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ gegeben.
Wie lauten seine neuen Koordinaten $[\vec{v}]_{\tilde{\mathcal{B}}}$?

Berechnen die **Koordinatenvektoren der alten Basis $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$** aus den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= a_{11}\vec{\tilde{b}}_1 + \ldots + a_{1n}\vec{\tilde{b}}_n \\
&\vdots \\
\vec{b}_n &= a_{n1}\vec{\tilde{b}}_1 + \ldots + a_{nn}\vec{\tilde{b}}_n
\end{aligned}$$

Basiswechsel

Es sei nun $\vec{v} \in V$ mit Koordinaten $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v_1 \vec{b}_1 + \ldots + v_n \vec{b}_n \\
&= v_1 (a_{11} \vec{\tilde{b}}_1 + a_{12} \vec{\tilde{b}}_2 + \ldots + a_{1n} \vec{\tilde{b}}_n) + v_2 (a_{21} \vec{\tilde{b}}_1 + a_{22} \vec{\tilde{b}}_2 + \ldots + a_{2n} \vec{\tilde{b}}_n) + \ldots \\
&\quad + v_n (a_{n1} \vec{\tilde{b}}_1 + a_{n2} \vec{\tilde{b}}_1 + \ldots + a_{nn} \vec{\tilde{b}}_n) \\
&= (v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + \ldots + v_n a_{n1}) \vec{\tilde{b}}_1 + (v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + \ldots + v_n a_{n2}) \vec{\tilde{b}}_2 + \ldots \\
&\quad + (v_1 a_{1n} + v_2 a_{2n} + \ldots + v_n a_{nn}) \vec{\tilde{b}}_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{v}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + \ldots + v_n a_{n1} \\ v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + \ldots + v_n a_{n2} \\ \vdots \\ v_1 a_{1n} + v_2 a_{2n} + \ldots + v_n a_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=: W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Die $(n \times n)$-Matrix $W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$ heißt **Basiswechselmatrix** von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

Basiswechsel

Basiswechselmatrix:

$$W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Koordinatenvektoren der alten Basis $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= a_{11}\tilde{\vec{b}}_1 + \ldots + a_{1n}\tilde{\vec{b}}_n \\ &\vdots \\ \vec{b}_n &= a_{n1}\tilde{\vec{b}}_1 + \ldots + a_{nn}\tilde{\vec{b}}_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = \left([\vec{b}_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}, \ldots, [\vec{b}_n]_{\tilde{\mathcal{B}}}\right)}$$

Die Spalten der Basiswechselmatrix sind die Koordinatenvektoren der alten Basis in der neuen Basis.

Basiswechsel

Spezialfall: $\boxed{V = \mathbb{R}^n}$

Vektoren sind üblicherweise in Koordinaten der Standardbasis geschrieben.
Es seien Basen $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\vec{\tilde{b}}_1, \ldots, \vec{\tilde{b}}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben.

Berechnung der Koordinatenvektoren der alten Basis $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= a_{11}\vec{\tilde{b}}_1 + \ldots + a_{1n}\vec{\tilde{b}}_n \\ &\vdots \\ \vec{b}_n &= a_{n1}\vec{\tilde{b}}_1 + \ldots + a_{nn}\vec{\tilde{b}}_n \end{aligned}$$

In Matrixform geschrieben:

$$\underbrace{\left(\vec{\tilde{b}}_1, \ldots, \vec{\tilde{b}}_n\right)}_{=\tilde{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}} = \underbrace{\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right)}_{=B}$$

Diese Matrixgleichung $\boxed{\tilde{B} \cdot W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}} = B}$ ist mit dem Gauss-Algorithmus lösbar.

Spaltenraum und Kern einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \dots \; \vec{a}_n)$$

Spaltenraum von A: $\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Span}(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\})$.

Kern von A: $\mathrm{Ker}(A) := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

$\mathrm{Ker}(A)$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$.

Es gilt:

- $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{K}^m$.
  Die Pivotspalten von A formen eine Basis von $\mathrm{Col}(A)$.
  Rang von A: $\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Col}(A)$.
- $\mathrm{Ker}(A)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{K}^n$.
  Ist $\{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots + t_k\vec{v}_k, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}\}$ die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$ in parametrischer Vektorform, so ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ Basis von $\mathrm{Ker}(A)$.

Dimensionsformel: $\boxed{\mathrm{rg}\,(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n}$

Spaltenraum und Kern einer Matrix

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 12 & 4 & -10 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & 6 & 2 & -5 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{2}} & -8 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

Ablesen:

- $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rg}(A) = 3$.
- Basis für $\mathrm{Col}(A)$:
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$
- $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2 = 5\text{-}\dim(\mathrm{Col}(A))$

Spaltenraum und Kern einer Matrix

Basis des Kerns bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 12 & 4 & -10 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 6 & 0 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} & -4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} x_1 &= -6x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= 4x_4 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

mit Parametern $x_2 = t,\ x_4 = s$:

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = t \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ \mathbf{0} \\ 4 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_2}, \ t, s \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ist eine Basis für $\mathrm{Ker}(A)$.

Lineare Abbildungen

Es seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear** oder **Homomorphismus**, falls

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ f(\vec{u} + v) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
(2) $\forall \vec{v} \in V \, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \ f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$.

d.h.: $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \ f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}).}$

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt

- **injektiv**, falls $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ \vec{u} \neq \vec{v} \ \Rightarrow \ f(\vec{u}) \neq f(\vec{v})$.
- **surjektiv**, falls $\forall \vec{w} \in W \, \exists \, \vec{v} \in V : \ f(\vec{v}) = \vec{w}$.
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Der **Kern einer Abbildung** f ist $\operatorname{Ker}(f) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\} = f^{-1}(\{\vec{0}\})$.

Das **Bild einer Abbildung** f ist $\operatorname{Im}(f) := \{\vec{w} \in W \mid \exists \, \vec{v} \in V : \ f(\vec{v}) = \vec{w}\} = f(V)$.

Es gilt:

- $\operatorname{Ker}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes V.
- $\operatorname{Im}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes W.