Lineare Abbildungen

Es seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear** oder **Homomorphismus**, falls

(1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \; f(\vec{u} + v) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

(2) $\forall \vec{v} \in V \, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \; f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$.

d.h.: $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \; f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}).}$

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt

- **injektiv**, falls $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \; \vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow f(\vec{u}) \neq f(\vec{v})$.
- **surjektiv**, falls $\forall \vec{w} \in W \, \exists \, \vec{v} \in V: \; f(\vec{v}) = \vec{w}$.
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Der **Kern einer Abbildung** f ist $\operatorname{Ker}(f) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\} = f^{-1}(\{\vec{0}_W\})$.

Das **Bild einer Abbildung** f ist $\operatorname{Im}(f) := \{\vec{w} \in W \mid \exists \, \vec{v} \in V: \; f(\vec{v}) = \vec{w}\} = f(V)$.

Theorem 17:

- $\operatorname{Ker}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes V.
- $\operatorname{Im}(f)$ ist ein Unterraum des Vektorraumes W.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Ziel ist, zu zeigen, dass jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch eine Matrix charakterisiert werden kann.

Erinnerung:

Es sei A eine $(m \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$, d.h. $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

Nach **Theorem 1** gilt:

Die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist linear.

$\Rightarrow$ Die Suche nach Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist gleichbedeutend mit der Suche nach Urbildern $\vec{x}$ unter der Abbildung f für einen Vektor $\vec{b}$ des Bildraums $\mathbb{K}^m$.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Betrachten vorerst $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$.

Es sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung.

Für $\vec{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ gilt: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Da f linear ist, folgt: $\boxed{\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n : \; f(\vec{x}) = A\vec{x} \;\text{ mit }\; A := (f(\vec{e}_1)\ f(\vec{e}_2)\ \ldots\ f(\vec{e}_n)).}$

Theorem 18:

Zu jeder linearen Abbildung (Homomorphismus) $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ existiert eine eindeutig bestimmte $(m \times n)$-Matrix A mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$.

Die Matrix A heißt **Standardmatrix** von f.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Betrachten vorerst $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$.

Nutzen dann in der Verallgemeinerung die Isomorphie jedes n-dimensionalen Vektorraumes über $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{K}^n$.

Theorem 19: Es sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine lineare Abbildung mit der Standardmatrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, d.h. $\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n : \; f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dann gilt:

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$ und $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Col}(A)$.
- f ist **injektiv** $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung.
  $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.
  $\Leftrightarrow$ Jede Spalte von A ist Pivotspalte.
- f ist **surjektiv** $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$ lösbar.
  $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{K}^m$.
  $\Leftrightarrow$ Jede Zeile von A enthält eine Pivotposition.
- f ist **bijektiv** $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Es seien V und W Vektorräume der Dimensionen $\dim V = n$ und $\dim W = m$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Basen $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ bzw. $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_m\}$.

Theorem 20:

Zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ existiert eine eindeutig bestimmte $(m \times n)$-Matrix A derart, dass für alle $\vec{v} \in V$ gilt:

$$[f(\vec{v})]_{\mathcal{D}} = A\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Die Matrix A heißt **Darstellungsmatrix** von f **bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$**.

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Es seien $V_1,\ V_2,\ V_3$ Vektorräume der Dimensionen $\dim V_i = n_i$, $i = 1, 2, 3$ über $\mathbb{K}$.
Die **Komposition** zweier linearer Abbildungen $f_1 : V_1 \to V_2$ und $f_2 : V_2 \to V_3$

$$(f_2 \circ f_1)(\vec{v}) := f_2(f_1(\vec{v})) \quad \text{für alle } \vec{v} \in V_1$$

ist ebenfalls linear.

Seien A_1 und A_2 die Darstellungsmatrizen von f_1 bzw. f_2 bzgl. $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bzw. $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} [f_1(\vec{v})]_{\mathcal{B}_2} &= A_1\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} \quad \text{für alle } \vec{v} \in V_1, \\ [f_2(\vec{w})]_{\mathcal{B}_3} &= A_2\,[\vec{w}]_{\mathcal{B}_2} \quad \text{für alle } \vec{w} \in V_2. \end{aligned}$$

Und damit:

$$[(f_2 \circ f_1)(\vec{v})]_{\mathcal{B}_3} = (A_2 \cdot A_1)\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} \quad \text{für alle } \vec{v} \in V_1.$$

$\Rightarrow \quad A_1 \cdot A_2$ ist die **Darstellungsmatrix der Komposition** $f_2 \circ f_1$ bzgl. $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_3$.

Darstellungsmatrix unter Basiswechsel

Basiswechsel:

Es seien $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\vec{b}}_1, \dots, \tilde{\vec{b}}_n\}$ und $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{\vec{d}}_1, \dots, \tilde{\vec{d}}_m\}$ andere Basen in V bzw. W.
Seien $W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$ und $W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}}$ die zugehörigen **Basiswechselmatrizen**, dann gilt:

$$\forall \vec{v} \in V: \ [\vec{v}]_{\tilde{\mathcal{B}}} = W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} \qquad \text{und} \qquad \forall \vec{w} \in W: \ [\vec{w}]_{\tilde{\mathcal{D}}} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}}\,[\vec{w}]_{\mathcal{D}}$$

Folglich:

$$[f(\vec{v})]_{\tilde{\mathcal{D}}} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}}\,[f(\vec{v})]_{\mathcal{D}} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}}\,A\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \underbrace{(W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \cdot A \cdot W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}^{-1})}_{=\tilde{A}}\,[\vec{v}]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

Die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von f zu den Basen $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\tilde{\mathcal{D}}$ erfüllt die Beziehung:

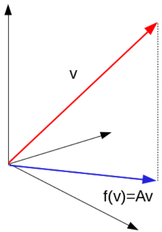
$$\boxed{\tilde{A} = W_{\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}}} \cdot A \cdot W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}}$$

Spezialfall: $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{D}}$. Dann gilt: $\tilde{A} = C \cdot A \cdot C^{-1}$
mit $C := W_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$. Die Matrizen A und $\tilde{A}$ heißen zueinander **ähnlich**.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\; f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

- **Projektionen**



z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

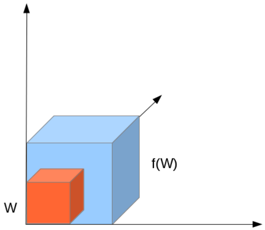
die senkrechte Projektion auf die xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Projektionen sind weder injektiv noch surjektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

- **Skalierungen** (Vergrößern, Verkleinern & Spiegeln)



z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

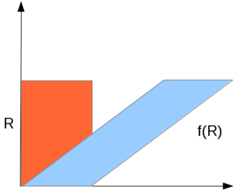
Vergrößerung um den Faktor 2 in $\mathbb{R}^3$.

Skalierungen sind bijektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

- **Scherungen**



z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

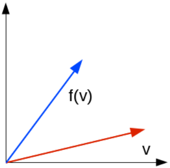
Verzerrung in x-Richtung in $\mathbb{R}^2$.

Scherungen sind bijektiv.

Geometrische Deutung linearer Abbildungen

Betrachten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

- **Rotationen**



z.B. $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Rotation um den Winkel φ um den Nullpunkt im math. positiven Drehsinn in $\mathbb{R}^2$.

Rotationen sind bijektiv.

Die Determinante

Die Determinante ist ein **charakteristischer Wert für eine quadratische Matrix**.

$\boxed{\textbf{im } \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\textbf{:}}$ $\quad \det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

Geometrische Interpretation: $|\det A|$ ist der Flächeninhalt des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelogramms.

$\boxed{\textbf{im } \mathbb{R}^{\mathbf{3}}\textbf{:}}$

$$\begin{aligned} \det A \quad &:= \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &:= \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

(Sarrussche Regel)

Geometrische Interpretation: $|\det A|$ ist das Volumen des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds.

Die Determinante

Die **Determinante** einer $(n \times n)$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist der Wert

$$\begin{aligned} \det A &:= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \; . \end{aligned}$$

für eine beliebig fest gewählte Zeile i (**Entwicklung nach der i-ten Zeile**).

$\boldsymbol{A_{ij}}$ ist die Matrix, die übrig bleibt, wenn die i-te Zeile und j-te Spalte von A gestrichen werden.

Theorem 21:

- Die Definition der Determinante ist korrekt, d.h. ihr Wert ist unabhängig von der gewählten Entwicklungszeile.
- Die Determinante kann auch durch Entwicklung nach einer beliebigen Spalte j von A berechnet werden:
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \; .$$