Berechnung der Determinante

Verhalten der Determinante unter elementaren Zeilenoperationen:

- Das **Vertauschen** zweier Zeilen/Spalten der Matrix A ändert nur das Vorzeichen der Determinante, d.h: $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$:

  $\det(\vec{a}_1, \ldots, \boldsymbol{\vec{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{\vec{a}_j}, \ldots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \ldots, \boldsymbol{\vec{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{\vec{a}_i}, \ldots, \vec{a}_n).$

- Beim **Skalieren** einer Zeile/Spalte skaliert die Determinante in gleicher Weise:

  $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$: $\det(\vec{a}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda\vec{a}_i}, \ldots, \vec{a}_n) = \boldsymbol{\lambda}\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n).$

- Die **Addition eines Vielfachen** einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert nicht den Wert der Determinante, d.h. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$:

  $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i + \boldsymbol{\lambda\vec{a}_j}, \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$

Algorithmus zur Berechnung von det A:

(1) Reduziere die Matrix A auf Zeilenstufenform U <u>ohne</u> Skalierungen. Die Anzahl Zeilenvertauschungen sei m.

(2) Berechne die Determinante aus der Determinante von U:

$$\det A = (-1)^m \det U = (-1)^m u_{11} \cdot \ldots \cdot u_{nn}.$$

Eigenschaften der Determinante

Es sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$
\begin{aligned}
\textbf{det } \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0} \;&\Leftrightarrow\; u_{ii} \neq 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.\\
&\Leftrightarrow\; \text{alle Spalten von } A \text{ sind Pivotspalten.}\\
&\Leftrightarrow\; \text{alle Spalten von } A \text{ sind linear unabhängig.}\\
&\Leftrightarrow\; \text{die Spalten von } A \text{ spannen ein Parallelepiped}\\
&\; \text{von positivem (n-dimensionalem) Volumen.}\\
&\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = n.\\
&\Leftrightarrow\; A\vec{x} = \vec{0} \text{ ist nur trivial lösbar.}\\
&\Leftrightarrow\; \operatorname{Ker}(A) = \{\vec{0}\}.
\end{aligned}
$$

Theorem 22: Eine $(n \times n)$-Matrix A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Eigenschaften der Determinante

Für beliebige $(n \times n)$-Matrizen A, B gilt:

1. $\det A^T = \det A$.
2. $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.
3. falls A^{-1} existiert, gilt: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
4. Ist A von Blockstruktur, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, mit $(m \times m)$, $(m \times s)$ und $(s \times s)$ Matrizen A_1, A_2 bzw. A_3 (0 ist die $s \times m$-Nullmatrix), so gilt:

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_3.$$

Determinante einer linearen Abbildung

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$.

Es gilt, dass der Wert der Determinante der Darstellungsmatrizen von f bzgl. aller Basen von V gleich ist. Die Determinante ist damit ein charakteristischer Wert der linearen Abbildung:

Die **Determinante** f ist definiert als $\det f := \det A$ für eine Darstellungsmatrix von f bzgl. einer beliebigen Basis von V.

Geometrische Bedeutung der Determinante:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $S \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet endlichen Volumens. Dann gilt

$$\text{Volumen}(f(S)) = |\det f| \cdot \text{Volumen}(S).$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$.

Frage: Gibt es Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, die unter der Wirkung von A lediglich skaliert werden?

Definition: Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, heißt **Eigenvektor** der Matrix A, falls:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K}: \quad A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Der zugehörige Skalar heißt **Eigenwert** der Matrix A.

Für $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, gilt: $\quad A\vec{v} = \lambda\vec{v} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}.$

Also gibt es einen Eigenvektor $\vec{v}$ von A mit Eigenwert λ gdw. das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen besitzt.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Erinnerung:

$(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$ besitzt nichttriviale Lösungen

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda E_n$ ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda E_n$ hat Spalten, die keine Pivotspalten sind

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \neq \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda E_n) = 0$

$\vdots$

Definition: Das Polynom n-ten Grades $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix A.

Theorem 23: Die Eigenwerte einer $(n \times n)$-Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes reelle Polynom $p(x)$ vom Grad n besitzt genau n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{C}$, und zwar reelle und ggf. Paare konjugiert komplexer Nullstellen. Dabei werden alle Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Und es gilt:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Die Vielfachheit der Eigenwerte einer Matrix A als Nullstellen von $p_A(\lambda)$ heißt **algebraische Vielfachheit**.

Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ von A:

Theorem 24: Die Lösungsmenge von $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$ ohne $\vec{0}$, d.h.
$\mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \setminus \{\vec{0}\}$, ist die Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ.

Folgerung:
Die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ von A bildet zusammen mit $\vec{0}$ einen Unterraum von $\mathbb{K}^n$, den sog. **Eigenraum von A zum Eigenwert λ**.

Bezeichung: $\boldsymbol{E_A(\lambda)}$.

Die Dimension von $E_A(\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ.