Eigenwerte und Eigenvektoren

Theorem 25: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist größer oder gleich 1 und stets kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.

Theorem 26: Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Eigenvektoren zu **paarweise unterschiedlichen** Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ einer $(n \times n)$-Matrix A, dann ist die Menge $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ **linear unabhängig**.

Folgerung:

- Für Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ einer $(n \times n)$-Matrix A gilt stets
$$\boldsymbol{E_A(\lambda_1) \cap E_A(\lambda_2) = \{\vec{0}\}} \,.$$
- Besitzt eine $(n \times n)$-Matrix A genau n paarweise unterschiedliche Eigenwerte, so sind alle Eigenräume eindimensional und jede Menge aus n zugehörigen Eigenvektoren zu den Eigenwerten bildet eine **Basis** von $\mathbb{K}^n$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ zugehörige Eigenvektoren.

Es gilt stets:

$$\boxed{\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.}$$

Folgerung:

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_k = 0\ .$$

Eigenwerte von A^{-1}:

Ist A invertierbar, so hat A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ mit denselben zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Denn:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_k &= \lambda_k \vec{v}_k \\ \Leftrightarrow \quad A^{-1}A\vec{v}_k &= \vec{v}_k = \lambda_k A^{-1}\vec{v}_k \\ \Leftrightarrow \quad A^{-1}\vec{v}_k &= \frac{1}{\lambda_k} v_k, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ zugehörige Eigenvektoren.

Eigenwerte von A^T:

Die transponierte Matrix zu einer $(n \times n)$-Matrix A hat **dieselben Eigenwerte** wie A, aber die zugehörigen Eigenräume $E_A(\lambda_k)$ und $E_{A^T}(\lambda_k)$ sind i.a. verschieden.

Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A (d.h. $A = A^T$):

- Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A sind **reell**. A hat also stets n reelle Eigenwerte (gezählt mit ihrer algebraischen Vielfachheit).
- Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten von A gehören, sind **zueinander orthogonal**.

Komplexwertige Eigenwerte

Es sei A eine beliebige $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$.

Es gilt:

- Ist $\lambda = a + \mathrm{i}b$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$ Eigenwert.
- Die Berechnung der Eigenvektoren kann ganz analog wie in $\mathbb{R}$ erfolgen, nur konsequent in $\mathbb{C}$.

Theorem 27:

Ist λ ein komplexwertiger Eigenwert von A, so sind auch die zugehörigen Eigenvektoren komplexwertig.

Ist $\vec{v} = \vec{u} + \mathrm{i}\vec{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = a + \mathrm{i}b$, so ist $\overline{\vec{v}} = \vec{u} - \mathrm{i}\vec{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$.