Ähnliche Matrizen

Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B heißen **ähnlich**, falls eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix P existiert mit

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \,. \qquad (*)$$

Theorem 28: Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

Beweis: Es seien A und B ähnliche $(n \times n)$-Matrizen, d.h. $\exists P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $(*)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E_n) \;=\; \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda E_n) \\
&= \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot E_n \cdot P) \\
&= \det\left(P^{-1} \cdot (A - \lambda E_n) \cdot P\right) \\
&= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det P \\
&= \det(A - \lambda E_n) = p_A(\lambda).
\end{aligned}$$

Theorem 29: Ähnliche Matrizen A und B haben zum selben Eigenwert λ dieselbe maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren, d.h.

$$\dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda) \,.$$

Ähnliche Matrizen & Lineare Abbildung

Es sei $f : V \to V$ linear auf einem Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$, $\dim V = n$.

Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.
Es sei A die Darstellungsmatrix von f bzgl. $\mathcal{B}$.

Dann gilt: Die Menge aller Darstellungsmatrizen von F ist gleich der Menge aller zu A ähnlichen Matrizen in $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Definition:

Die **Eigenwerte** von f sind die Eigenwerte (irgend)einer Darstellungsmatrix von f.

Die **Eigenvektoren** von f zu einem Eigenwert sind diejenigen Vektoren $\vec{v} \in V$, deren Koordinatenvektoren $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ in (irgend)einer Basis $\mathcal{B}$ von V die Eigenvektoren der Darstellungsmatrix von f in dieser Basis sind.

Diagonalisierung

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt **diagonalisierbar**, falls A zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist, d.h.

$$\exists\, P \in \mathbb{K}^{n \times n}, P \text{ regulär}: \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Theorem 30:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von A für $\mathbb{K}^n$.

(Die Diagonalisierung ist bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte eindeutig.)

Folgerung:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ alle Eigenwerte von A sind reell, und für jeden Eigenwert stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} \dim E_A(\lambda_j) = n.$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle unterschiedlichen Eigenwerte von A

Diagonalisierung

Algorithmus zur Matrix-Diagonalisierung:

1. Schritt: Berechnung der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A.
Gibt es komplexwertige Eigenwerte, ist A nicht diagonalisierbar. Sonst:

2. Schritt: Berechnung einer Basis für jeden Eigenraum $E_A(\lambda)$ von A.

3. Schritt: Umfasst die Menge, die aus den Vektoren der berechneten Basen der Eigenräume besteht, insgesamt n Elemente, so bildet sie eine Eigenvektorbasis

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

von $\mathbb{K}^n$ bzgl. A, und A ist **diagonalisierbar** mit

$$P := (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$$

Andernfalls ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

4. Schritt: Ist A diagonalisierbar, so ist:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \,.$$

Diagonalisierung

Beispiel 1 Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ (Berechnungen s. zuvor)

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ (algebr. VF 1), $\lambda_2 = 2$ (algebr. VF 2).

Eigenraum $E_A(\lambda_1)$: eine Basis ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum $E_A(\lambda_2)$: eine Basis ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\Rightarrow$ geometrische Vielfachheit von λ_2 $<$ algebraische Vielfachheit von λ_2.

$\Rightarrow$ Es existiert keine Eigenvektorbasis von A für $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ A ist **nicht diagonalisierbar**.

Diagonalisierung

Beispiel 2 Matrix: $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (Berechnungen siehe zuvor)

Eigenwerte: $\lambda_1 = -3$ (algebr. VF 2), $\lambda_2 = 5$ (algebr. VF 1).

Eigenraum $E_A(\lambda_1)$: eine Basis ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum $E_A(\lambda_2)$: eine Basis ist $\{\vec{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\Rightarrow$ eine Eigenvektorbasis von A für $\mathbb{R}^3$ ist $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

$\Rightarrow$ A ist **diagonalisierbar**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Rotationseigenschaften linearer Abbildungen

Beispiel Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\boldsymbol{\lambda_{2,3} = 2 \pm 3\mathrm{i}}$.

Eigenraum $E_A(\lambda_1)$: eine Basis ist $\{\vec{v}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum $E_A(\lambda_2) \subset \mathbb{C}^3$: eine Basis ist $\{\vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Setzen $P := (\vec{v}_1, \mathrm{Re}\,\vec{v}_2, \mathrm{Im}\,\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$:

(Ist $\vec{v}$ komplexwertiger Eigenvektor, so sind Re $\vec{v}$ und Im $\vec{v}$ stets linear unabhängig.)

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ 0 & -r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_2 = 2 + 3\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.