Lineare diskrete dynamische Systeme

Ein System

$$\vec{w}_{k+1} = A\vec{w}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Startvektor $\vec{w}_0$ und Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

heißt **lineares diskretes dynamisches System**.

- Besitzt A eine Eigenvektorbasis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so läßt sich das System in der Form

  $$\vec{w}_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \ldots + c_n \lambda_1^k \vec{v}_n$$

  mit $\vec{w}_0 = c_1 \vec{v}_1 + \ldots c_n \vec{v}_n$ schreiben.
- Die Eigenwert-Eigenvektor-Information erlaubt eine **Klassifikation aller linearen diskreten dynamischen Systeme**.
- Bei **parameterabhängigen** Systemen kann eine Änderung der Parameter zu einer qualitativen Änderung des Verhaltens des Systems führen.

Lineare diskrete dynamische Systeme

Beispiel: Räuber-Beute-Wechselwirkung

$$\vec{w}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix} \vec{w}_{k+1}, \quad k = 0, 1,$$

mit $\vec{w}_k = (x_k, y_k)^T$ und Startvektor $\vec{w}_0 = (x_0, y_0)^T$.

Eigenwerte	**Basis der Eigenräume**
$\lambda_1 = 1.02$	$E_A(\lambda_1)$: $\{\vec{v}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$.
$\lambda_2 = 0.58$	$E_A(\lambda_2)$: $\{\vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für einen beliebigen Startvektor $\vec{w}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ folgt:

$$\boxed{\vec{w}_k = c_1 \underbrace{(1.02)^k}_{\to \infty} \vec{v}_1 + c_2 \underbrace{(0.58)^k}_{\to 0} \vec{v}_2.} \quad \text{für } k \to \infty$$

Nichtlineare diskrete dynamische Systeme

Gegeben sei ein **nichtlineares diskretes dynamisches System**:

$$\vec{y}_{k+1} = F(\vec{y}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Startvektor $\vec{y}_0$ und einer nichtlinearen Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Es sei $\vec{y}^*$ eine **stationäre Lösung** $\vec{y}^*$ (Ruhelage), d.h. $\boxed{F(\vec{y}^*) = \vec{y}^* \ .}$

Approximation des nichtlinearen Systems durch ein **lineares System:**

$$\begin{aligned} \vec{y}_{k+1} &\approx \underbrace{F(\vec{y}^*)}_{=\vec{y}^*} + F'(\vec{y}^*)(\vec{y}_k - \vec{y}^*) \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{y}_{k+1} - \vec{y}^*}_{=:\vec{w}_{k+1}} &= \underbrace{F'(\vec{y}^*)}_{=:A}\underbrace{(\vec{y}_k - \vec{y}^*)}_{=:\vec{w}_k} \end{aligned}$$

Nichtlineare diskrete dynamische Systeme

Nichtlineares diskretes dynamisches System:

$$\vec{y}_{k+1} = F(\vec{y}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

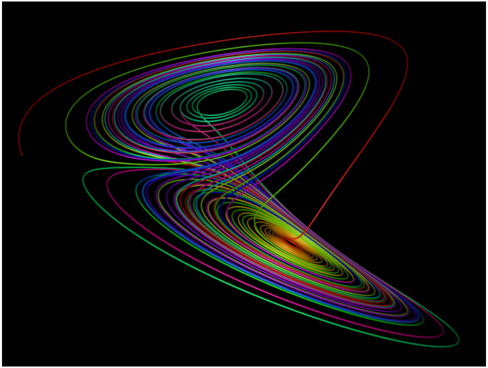
zugehörige Linearisierung nahe der stationären Lösung $\vec{y}^*$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\vec{y}_{k+1} - \vec{y}^*}_{=:\vec{w}_{k+1}} \quad &= \quad \underbrace{F'(\vec{y}^*)}_{=:A}\underbrace{(\vec{y}_k - \vec{y}^*)}_{=:\vec{w}_k} \\
\vec{w}_{k+1} \quad &= \quad A\vec{w}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Das lineare System gibt Auskunft über das lokale Verhalten des nichtlinearen Systems nahe der stationären Lösung $\vec{y}^*$ (Ruhelage).

Nichtlineare dynamische Systeme

Beispiel: **Einfaches Wettermodell - Lorenzattraktor**



$$
\begin{aligned}
x' &= a(y - x) \\
y' &= x(b - z) - y \\
z' &= xy - cz
\end{aligned}
$$

für $a = 10$, $b = 28$, $c = \frac{8}{3}$ gibt es genau **3 Ruhelagen**:

$(0, 0, 0)^T$

$(\sqrt{c(b-1)}, \sqrt{c(b-1)}, b-1)^T$

$(-\sqrt{c(b-1)}, -\sqrt{c(b-1)}, b-1)^T$.

Euklidische Vektorräume

Ein **Skalarprodukt** auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, die folgende Axiome erfüllt:

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(S1) $\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \beta\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$ **Linearität**

(S2) $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ **Symmetrie**

(S3) $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle > 0$ für $\vec{u} \neq \vec{0}$ **positive Definitheit**

Das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt **euklidischer Vektorraum**.

Länge und Abstand von Vektoren

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt **Norm**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall c \in \mathbb{R}:$

(N1) $\|\vec{u}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = 0$

(N2) $\|c\vec{u}\| = |c|\|\vec{u}\|$ **Skalierung**

(N3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ **Dreiecksungleichung**

Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren in einem Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ ist

$$\operatorname{dist}(\vec{u}, \vec{v}) := \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein **euklidischer Vektorraum**, dann ist durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \qquad \text{für alle } \vec{v} \in V$$

eine Norm auf V definiert, die sogenannte **euklidische Norm**.

Orthogonalität

Für einen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \qquad |\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \,,$$

dabei ist $\|\cdot\|$ die zugehörige euklidische Norm.

Erinnerung:

Zwei Vektoren eines euklidischen Vektorraumes heißen **orthogonal**, falls $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ gilt. Schreibweise: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ein Vektor $\vec{v}$ heißt **orthogonal zu einem Unterraum** U von V, falls für alle $\vec{u} \in U$ gilt:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0.$$

Schreibweise: $\vec{v} \perp U$.

Das **orthogonale Komplement** eines Unterraumes U von V ist die Menge

$$U^\perp := \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \perp U\} \,.$$