TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

2. Übungsblatt für die Übungen vom 21.10.-25.10.2013

Vektoren und Matrizen

Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwerer.

Ü7. Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Matrizenausdrücke: AB, BA, AD, $A(B+C)$, $AB+AC$, A^TB^T, $(BA)^T$, C^2, D^TB.

Berechnen Sie A^8 für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ü8. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ü9. (a) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Hilfe des (Standard-)skalarprodukts in der Ebene.

(b) Beweisen Sie unter Zuhilfenahme des Skalarprodukts, dass in einem Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Gegeben seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{R}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix},\quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},\quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

H11. Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die durch die Gleichung $2x + 3y - 4z = 5$ bestimmte Ebene, d.h.

$$E = \{(x, y, z)^\top \mid 2x + 3y - 4z = 5\}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Punkt $\vec{u}$ von E und geben Sie die Hessesche Normalform von E an.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Ebene E mit der Geraden $g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ für $\vec{u} = (1, 1, 1)^\top$, $\vec{v} = (2, 0, 0)^\top$.

(c) Bestimmen Sie die Gerade g', die man aus g bei Projektion auf die Ebene E erhält.

Hinweis: Die Projektion einer Geraden ist wieder eine Gerade (oder ein Punkt als Sonderfall), man braucht also z.B. nur zwei Punkte von g' zu bestimmen.

H12.* Zeigen Sie, dass die Seitenmittelpunkte eines beliebigen Vierecks im $\mathbb{R}^n$ ein Parallelogramm bilden. Wir setzen voraus, dass die Eckpunkte des Vierecks vier voneinander verschiedene Punkte sind, aber wir setzen nicht voraus, dass die Eckpunkte in einer Ebene liegen.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang sind. Zwei Seiten bzw. Geraden sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.