TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

3. Übungsblatt für die Übungen vom 28.10.-1.11.2013

Matrizenrechnung, Gauß-Algorithmus, Elementarmatrizen

Hinweis: Die Übung am Donnerstag findet wegen eines Feiertags nicht statt, bitte besuchen Sie statt dessen eine andere Übung. Der Lernraum fällt aus dem gleichen Grund aus, der Abgabetermin für die Hausaufgabe A10 verlängert sich demzufolge um eine Woche.

Ü13. Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die Kupfer, Silber und Gold in in der Tabelle angegebenen Prozentsätzen enthalten. Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält? Wenn ja, so geben Sie eine solche Mischung an.

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Ü14. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Wenden Sie elementare Zeilenoperationen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an, bis Sie die Einheitsmatrix erhalten. Schreiben Sie jeweils die zugehörige Elementarmatrix auf. Verifizieren Sie, dass die Umformungen der Multiplikation mit den entsprechenden Elementarmatrizen entsprechen.

$$[A|a] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{ und } [B|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ü15. (a) Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$ für alle 2×2-Matrizen A, B über $\mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Gleichung für beliebige $m \times r$-Matrizen A und $r \times n$-Matrizen B über $\mathbb{R}$ gilt.

(b) Gegeben sei eine $m \times r$-Matrix A und zwei beliebige $r \times n$-Matrizen B und C über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $A(B + C) = AB + AC$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $n \times n$-Matrizen A über $\mathbb{R}$ gilt:
$AE_n = E_nA = A$ (E_n ist die Einheitsmatrix entsprechender Dimension).

A16. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Gegeben seien die folgenden drei Ebenen: Ebene F_1 ist parallel zur $y-z$-Ebene und enthält den Punkt $P = (2, 2, 2)^T$. Für F_2 gilt: $F_2 := \{(x, y, z)^T \mid x + y + z = 3\}$. Die Ebene F_3 schließlich ist durch den Normalenvektor $(1, 2, 0)^T$ und den Punkt $(2, 1, 3)^T \in F_3$ definiert. Bestimmen Sie den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Ebenen:

(a) Modellieren Sie das Problem durch ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem, in dem Sie elementare Zeilenumformungen $z_1, \ldots, z_n$ auf A und b anwenden. Geben Sie die Lösungsmenge an.

(c) Geben Sie die Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_n$, die die Zeilenumformungen $z_1, \ldots, z_n$ beschreiben, an. Berechnen Sie das Produkt $\tilde{E} = E_n \cdot E_{n-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$ und berechnen Sie $\tilde{E} \cdot b$. Was stellen Sie fest?

H17. (a) Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gibt es reelle Zahlen r und s, so dass $rA + sB = C$ gilt?

(b) (i) Geben Sie eine 3×3-Matrix $M_1 \neq 0$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_1 = M_1^T$ gilt.

(ii) Geben Sie eine 3×3-Matrix $M_2 \neq 0$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_2 = -M_2^T$ gilt.

(iii) Geben Sie 3×3-Matrizen M_1 und M_2 mit $M_1 = M_1^T$ und $M_2 = -M_2^T$ über $\mathbb{R}$ an, für die $M_1 + M_2 = A$ gilt (wobei A die in Ü7 gegebene Matrix ist).

H18. (a)* Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) über $\mathbb{R}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0$

(iii) $BA = 0 \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0$

(b) Es seien A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?